Table des matières

Relations binaires

1 Généralités

$$\begin{array}{ll}
\text{Réflexivité} & : \forall x \in E, x\mathscr{R}x \\
\text{Symétrie} & : \forall x, y \in E, x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x \\
\text{Antisymétrie} & : \forall x, y \in E, (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x) \Rightarrow x = y \\
\text{Transitivité} & : \forall x, y, z \in E, (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x) \Rightarrow (x\mathscr{R}z)
\end{array}$$

2 Relation d'équivalence

Définition
$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si :

- $\mathscr{R}$ réflexive
- $\mathscr{R}$ symétrique
- $\mathscr{R}$ transitive

Définition
La classe d'équivalence de l'élément a est l'ensemble :

$$\mathscr{C}(a) = \{x \in E, x\mathscr{R}a\}$$

$E_{/\mathscr{R}}$ l'ensemble des classes d'équivalence.

Propriétés :

- $\mathscr{C}(a) = \mathscr{C}(b) \Leftrightarrow a\mathscr{R}b$
- Les classes d'équivalence forment une partition de E.

3 Relation d'ordre

Définition
$\mathscr{R}$ définie sur E est une relation d'ordre si:

- $\mathscr{R}$ est réflexive.
- $\mathscr{R}$ est antisymétrique.
- $\mathscr{R}$ est transitive.

Définition
On dit que l'ordre est total si $\forall (x, y) \in E^2, (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$.

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. Soit $A \subset E$.

Définitions
Soit $M \in E$.

- On dit que M est un majorant de A si $\forall a \in A, a \preceq M$.

- On dit que m est un minorant de A si $\forall a \in A, m \preceq a$.
- Une partie A de E ayant au moins un majorant est majorée.
- Une partie A de E ayant au moins un minorant est minorée.
- Une partie A de E ayant au moins un majorant et un minorant est bornée.

S'il existe un majorant de A apparenant à A, alors il est unique, on le nomme 'plus grand élément' de A. On le note $\max(A)$.
S'il existe un minorant de A apparenant à A, alors il est unique, on le nomme 'plus petit élément' de A. On le note $\min(A)$.
Si l'ensemble des majorants de A admet un 'ppe', alors on le nomme borne supérieure de A : $\sup(A)$.
Si l'ensemble des minorants de A admet un 'pge', alors on le nomme borne inférieure de A : $\inf(A)$.

Applications

1 Images

Définition
Soit A une partie de E.

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists x \in A, f(x) = y\}$$

Définition
Soit B une partie de F.

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

Theorème

$$\begin{array}{rcccc} f(A_1 \bigcap A_2) & \subset & f(A_1) & \bigcap & f(A_2) \\ f(A_1 \bigcup A_2) & = & f(A_1) & \bigcup & f(A_2) \\ f^{-1}(A_1 \bigcap A_2) & = & f^{-1}(A_1) & \bigcap & f^{-1}(A_2) \\ f^{-1}(A_1 \bigcup A_2) & = & f^{-1}(A_1) & \bigcup & f^{-1}(A_2) \end{array}$$

2 Bijection, surjection, injection

Soit $f : E \to F$.

Définition
f est surjective si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

ou $f(E) = F$.

Définition
f est injective si

$$\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

ou $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Définition
f est bijective si

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$$

ou f est surjective et injective.

Theorème

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

- f injective et g injective $\Rightarrow gof$ injective.
- f surjective et g surjective $\Rightarrow gof$ surjective.
- f bijective et g bijective $\Rightarrow gof$ bijective.

Structures usuelles

1 Une LCI

Définition
$(E, *)$ est un monoïde si :

- $*$ est associative.
- E admet un élément neutre pour la loi $*$.

Définition
$(E, +)$ est un groupe si:

- $(E, *)$ est un monoïde.
- Tout élément de E est symétrisable pour la loi $*$.

Si de plus, $*$ est commutative, alors on parlera de groupe commutatif ou abélien.

Définition
$(E, +, *)$ est un anneau si :

- $(E, +)$ est un groupe abélien (neutre : 0_E).
- $(E, *)$ est un monoïde (neutre : 1_E).
- $1_E \neq 0_E$
- $*$ distributive sur $+$.

Si $*$ est commutative, on parlera d'anneau abélien.

Définition
$(E, +, *)$ est un corps si:

- $(E, +, *)$ est un anneau abélien.
- Tout élément de $E \setminus \{0_E\}$ admet un inverse (symétrique pour la loi $*$).

2 Une LCI et une LCE

Définition
$(E, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel avec K un corps si :

- $(E, +)$ est un groupe abélien.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E$:
  - $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
  - $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
  - $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
  - $1_K \cdot x = x$

3 Deux LCI et une LCE

Définition

$(E, +, *, \cdot)$ est une K-algèbre avec K un corps si :

- $(E, +, \cdot)$ est une K-espace vectoriel.
- $(E, +, *)$ est un anneau.
- $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in E\colon\ \alpha \cdot (x * y) = (\alpha \cdot x) * y = x * (\alpha \cdot y)$.

Si $*$ est commutative, alors on parlera d'algèbre commutative.

Groupes

1 Généralités

Définition
$(G, *)$ est muni d'une structure de groupe si :

- $*$ est une L.C.I
- $*$ est associative
- $*$ possède un élément neutre
- tout élément de G est symétrisable

Propriétés :

- Unicité du neutre et du symétrique.
- Tout élément est régulier.

2 Sous-groupes

Définition
Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e.
H est un sous-groupe de G si :

- $H \subset G$,
- $e \in H$,
- $\forall x, y \in H, x * y \in H$; H stable pour $*$,
- $\forall x \in H, x^{-1} \in H$; H stable par symétrisation.

Theorème
Soit $(G, *)$ un groupe, $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G.
$\bigcap_{i \in I}$ est un sous-groupe de G.

3 Morphismes de groupes

Définition
Soient $(G, *)$ et $(H, +)$ des groupes et une application $f : G \to H$.
f est un morhpisme de groupe si : $\forall x, y \in G, f(x * y) = f(x) + f(y)$.

Définition

- Si f est bijective, alors f est un isomorphisme.
- Si H=G, alors f est un endomorphisme.
- Si f est un isomorphisme bijectif, alors f est un automorphisme.

Propriétés :

- $f(1_G) = 1_H$
- $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$
- $\forall p \in \mathbb{Z}, f(x^p) = [f(x)]^p$

Theorème

Si $f : G \to H$ est un isomorphisme, alors f^{-1} est un ismorphisme. On dit alors que G et H sont isomorphes : $G \approx H$.

4 Image - Noyau

Définition

Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes.

$$Im\, f = f(G) = \{y \in H, \exists x \in G, f(x) = y\} = \{f(x), x \in G\}$$

$$\ker f = f^{-1}(\{1_H\}) = \{x \in G, f(x) = 1_H\}$$

Theorème

$Im(f)$ est un sous-groupe de H. $\ker f$ est un sous-groupe de G.

Theorème

- f surjective $\Leftrightarrow Im\, f = H$
- f injective $\Leftrightarrow \ker f = \{1_G\}$

5 Transfert de structure

Theorème

Soient $(G, *)$ un groupe et f un morphisme surjectif de G dans H. $(H, \cdot)$ est un groupe.

6 Groupes monogènes, cycliques

Définition

$$Gr(a) = \left\{a^k, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Theorème

Le plus petit sous-groupe de G contenant a est $Gr(a)$.

Définition

- $Gr(a)$ est le sous-groupe de G engendré par a.
- G est monogène s'il existe $a \in G$ tel que $G = Gr(a)$, a est alors un générateur du groupe.
- G est cyclique s'il est monogène et fini.

- Si G est fini, l'ordre de a est $Card\,Gr(a)$, sinon l'ordre est infini.
- Si G est fini, l'ordre de G est $Card\,G$, sinon l'ordre est infini.
- Soit A une partie de G, $Gr(A)$ est le plus petit sous-groupe contenant A.

Theorème
$(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe monogène.

7 Groupe symétrique

Définition
$\mathscr{S}_n$ est l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même.

Theorème
$(\mathscr{S}_n, o)$ est un goupe.
$Card(\mathscr{S}_n) = n!$.

Définition
S_n est appelé le groupe symétrique d'ordre n.
Les éléments de $\mathscr{S}_n$ se nomment les permutations.

Définition

$$Supp(\sigma) = \{x \in E, \sigma(x) \neq x\}$$

Définition
Soient $a \in E, \sigma \in \mathscr{S}_n$.
Soit p le plus petit entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^p(a) = a$.

$$Orb_\sigma(a) = \left\{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \ldots, \sigma^{p-1}(a)\right\}$$

Propriétés :
- $Orb_\sigma(a) = Orb_\sigma(b) \Leftrightarrow b \in Orb_\sigma(a)$
- Les orbites selon σ constituent une partition de E.

Définitions
- On appelle cycle toute permutation de $\mathscr{S}_n$, n'ayant qu'une seule orbite dont le cardinal est ≥ 2.
- Si p est le cardinal de cette orbite, on parlera de p-cycle.
- Une transposition est un 2-cycle.
- Une permutation est un n-cycle.

Theorème
Toute permutation $\sigma \neq id_E$ est décomposable en un produti commutatif de cycles à supports disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre près.

Theorème
Toute permutation est décomposable en un produit de transpositions.

Définition
On dira que σ présente une inversion pour tout couple (i, j) tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.
Soit I le nombre d'inversions de la permutation σ.
$\epsilon(\sigma) = (-1)^I$ est la signature de σ.

Theorème
Soient σ_1 et $\sigma_2 \in \mathscr{S}_n$.

$$\epsilon(\sigma_1 o \sigma_2) = \epsilon(\sigma_1) \times \epsilon(\sigma_2)$$

Theorème
La signature d'un p-cycle est $(-1)^{p-1}$.

Définition

$$\mathscr{A}_n = \{\sigma \in \mathscr{S}_n, \sigma \text{ paire }\}$$

Theorème
$(\mathscr{A}_n, o)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{S}_n, o)$. C'est le groupe alterné d'ordre n.

$$Card(\mathscr{A}_n) = \frac{n!}{2}$$

8 $(\mathbb{Z}, +)$

Theorème
Les sous-groupes de ($\mathbb{Z}$,+) sont exactement les ensembles n.$\mathbb{Z}$avec $n \in \mathbb{Z}$.

Définition
Soit $n \in \mathbb{Z}$.
On dit que deux entiers x et y sont congrus modulo n si $y - x$ est divisible par n.
Notation : $z \equiv y \, mod \, n$ ou $x \equiv y[n]$.

Theorème
La relation 'est congru à' modulo n est une relation d'écquivalence sur $\mathbb{Z}$.
Theorème
Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, alors il existe $a \in \mathbb{N}$, tel que $H = Gr(a) = a.\mathbb{Z}$.

Définition
L'ensemble de toutes les classes de congruence modulo n est noté $\mathbb{Z}_{/n.\mathbb{Z}}$. C'est l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par $n.\mathbb{Z}$.

Theorème
Si $n \geq 2$, $\mathbb{Z}_{/n.\mathbb{Z}} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\right\}$ d'où $Card(\mathbb{Z}_{/n.\mathbb{Z}}) = n$.

Theorème
La relation de congruence modulo n est compatible avec l'addition :

$$\left.\begin{array}{r} x \equiv y\, mod n \\ x' \equiv y' mod n \end{array}\right\} \Rightarrow x + x' \equiv y + y'\, mod\, n$$

Theorème
$(\mathbb{Z}_{/n.\mathbb{Z}}, +)$ est un groupe commutatif.

Theorème
$\mathbb{Z}_{/n.\mathbb{Z}}$ est un groupe cyclique d'ordre n.
Si G est un groupe cyclique à n éléments, il existe un isomorphisme de $\mathbb{Z}_{/n.\mathbb{Z}}$ sur G.

Structure d'anneaux

1 Généralités

Définition
$(A, +, x)$ est un anneaux si :

- $+etx$ deux LCI.
- $(A, +)$ un groupe abélien de neutre 0_A.
- x associative.
- $1_A \neq 0_A$ neutre pour x.
- x distributive sur $+$.

Règles de calcul

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ba - b^2$$

Si $ab = ba$:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$
$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$$

Définition
Une unité de l'anneau A est un élément inversible de A.
U_A est l'ensemble des unités.

Theorème
(U_A, x) est un groupe.

2 Anneaux intègres

Définition
A est un anneau intègre si : A est commutatif et $\forall a, b \in A, ab = 0_A, ab = 0_A \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 0_A \\ ou \\ b = 0_A \end{array} \right.$.

Définition
On dit que a est un diviseur de zéro de A si $a \neq 0_A$ et $\exists b \in A, b \neq 0_A etab = 0$.

Définition
Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre et soient $x, y \in A$.
On dit que $x\, divise\, y$ s'il existe $z \in A, y = z.x$.

Theorème

Dans un anneau intègre, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $x \, divise \, y$.
- $y \in x.A$
- $y.A \subset x.A$

3 Sous-anneaux

Définition

A' est un sous-anneau d'un anneau A si :

- $A' \in A$
- $(A', +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$
- A' stable pour la multiplication
- $1_A \in A'$

4 Morphisme d'anneaux

Définition

f est un morphisme d'anneaux si :

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- $f(axb) = f(a)xf(b)$
- $f(1_A) = 1_B$

Theorème

La composée de deux morphismes est un morphisme. L'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

5 Image et noyau

Définition

$$Im \, f = f(A)$$

$$\ker f = \{a \in A, f(a) = 0_A\}$$

Propriétés :

- $f(k.a) = k.f(a)$
- $f(a^n) = (f(a))^n$

6 Idéal d'un anneau commutatif

Définition
Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Une partie I de A est un idéal si :
- $I \neq \emptyset$.
- I stable pour $+$.
- $\forall x \in I, \forall a \in A, a \times x \in I$.

Theorème
Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les sous-ensembles de la forme $n.\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Theorème
La relation de congruence modulo n est compatible avec la multiplication.

Theorème
$(\mathbb{Z}_{/n.\mathbb{Z}}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Theorème
Soit $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{/n.\mathbb{Z}}$ $(a \in \mathbb{Z})$.
Pour que $\overline{a}$ soit inversible, il faut et il suffit que a soit premier avec n.

Theorème
$\mathbb{Z}_{/n.\mathbb{Z}}$ est un corps si et seulement si n est un nombre premier. Pour que

Theorème
Soient I et J deux idéaux de $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.

Alors :
- $I \bigcap J$ est un idéal de A.
- $I + J = \{x + y / x \in I \text{ et } y \in J\}$ est un idéal de A.

Définitions
Un idéal engendré par un seul élément est dit principal.
Un anneau est dit principal lorsque tous ses idéaux sont principaux.

Theorème
$\mathbb{Z}$ est principal.

Structure de corps

1 Généralités

Définition
K doté de deux LCI + et x.

- $(K, +, x)$ un anneau commutatif.
- $U_k = K \backslash \{O_K\} = K*$

Theorème
Tout corps est un anneau intègre.

2 Sous-corps

Définition
K' est sous-corps d'un corps K si

- $K' \in K$
- K' un sous-anneau de K
- $\forall x \in K'*, x^{-1} \in K'$

3 Morphisme de corps

Définition
f est un morphisme de K dans L si :

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $f(xy) = f(x).f(y)$
- $f(1_K) = 1_L$

4 Corps des fractions

Theorème
Soit $(A, +, x)$ un anneau intègre, il existe un corps K unique à un isomorphisme près, tel que A est un sous-anneau de K, tout élément de K s'écrit sous la forme $x = ab^{-1} = b^{-1}a = \dfrac{a}{b}$.

5 Caractéristique d'un corps

Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps d'élément neutre $1_{\mathbb{K}}$ pour $\times$.

Soit $f \left| \begin{array}{lcc} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{K} \\ n & \mapsto & \begin{array}{cl} n.1_{\mathbb{K}} & \text{si } n > 0 \\ 0.1_{\mathbb{K}} & \text{si } n = 0 \\ n.1_{\mathbb{K}} = -(-n).1_{\mathbb{K}} & \text{si } n < 0 \end{array} \end{array} \right.$.

f est un homomorphisme d'anneaux.

Soit p le nombre premier tel que $\ker(f) = p.\mathbb{Z}$.

On dit alors que $\mathbb{K}$ est de caractéristique p.

Entiers naturels

1 Propriétés

Propriétés :

- $\mathbb{N}$ est muni de deux L.C.I : $+$ et $\times$.
- $+$ et $\times$ sont commutatives et chacune possède un élément neutre.
- $\times$ est distributive sur $+$.
- $\mathbb{N}$ est totalement ordonné.
- $\leq$ est compatible avec $+$ et $\times$.

Généralités

- $\mathbb{N}$ a un ppe : 0,
- $\mathbb{N}$ n'a pas de pge,
- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un ppe,
- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ et majorée admet un pge,
- $n > p \Leftrightarrow n + 1 \leq p$,
- $n \leq p \Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{N}, p = n + d$,

2 Théorème de récurrence

Principe

Soit A une partie de $\mathbb{N}$ telle que :

- $0 \in A$
- $\forall n \in \mathbb{N}, n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$

Alors : $A = \mathbb{N}$.

Récurrence classique

$$A = \{n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n) \text{ vraie}\}$$

Récurrence multiple

$$A = \{n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n) \text{ et } \mathscr{P}(n+1) \text{ vraies}\}$$

Récurrence forte

$$A = \{n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1), \dots \text{ et } \mathscr{P}(n) \text{ vraies}\}$$

3 Division euclidienne

Theorème

$$\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}^*, \exists!(q, r) \in \mathbb{N}^2, a = b.q + r \text{ et } 0 \leq r < b$$

4 Numération dans $\mathbb{N}$

Theorème
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier p et $P+1$ chiffres $q_p, q_{p-1}, \ldots, q_0$ tels que $n = b^p.q_p + b^{p-1}.q_{p-1} + \ldots + b^1.q_1 + q_0$ et $q_p \neq 0$.
L'écriture est unique, on note : $n = (q_p q_{p-1} \ldots q_0)_b$.
Passage de la base b à la base 10
Soit $n = (pqr)_b$, alors $n = p.b^2 + q.b + r$.
Passage de la base 10 àl la base b
On pose la division euclidienne de n par b, on réitère le procédé tant que le reste est supérieur à b.
n s'écrit alors en prenant les restes du dernier au premier.

5 Nombres premiers

Définition
p est premier si $\left\{ \begin{array}{c} p > 1 \\ \text{les seuls diviseurs de } p \text{ sont } 1 \text{ et } p \end{array} \right.$.

Theorème
Tout entier $a > 1$, non premier, admet un diviseur premier p tel que $p^2 < a$.

Theorème
L'ensemble des nombres premiers est infini.

Propriétés :

- p premier $\Rightarrow p$ premier avec tout entier $a \notin p.\mathbb{Z}$.
- $\left\{ \begin{array}{c} p \text{ premier} \\ p\, divise \prod_{i=1}^{n} a_i \end{array} \right. \Rightarrow \exists j, p\, divise\, a_j$.
  Si les a_i sont premiers, alors $p = a_j$.

Theorème fondamental
Tout nombre $a > 1$ est décomposable en un produit de facteurs premiers.
La décomposition est unique à l'ordre près.

Theorème
Soit $a = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ avec les p_i des nombres premiers deux à deux distincts.

$$x\, divise\, a \Leftrightarrow x = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i} \text{ avec } 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$$

$$\Rightarrow Card(D(a)) = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i + 1)$$

Theorème
Soient a et $b \in \mathbb{N}$, on note $d = a \wedge b$ et $m = \vee b$.

$$a \times b = (a \wedge b)(a \vee b)$$

Résolution de $a.x + b.y = c$ dans $\mathbb{Z}$
On pose $d = a \wedge b$.
Si d ne divise pas c, il n'ya pas de solution.
Si $d\, divise\, c$, on simplifie.
Soit (x'_0, y'_0) une solution particulière de la nouvelle équation, $(x_0 = c.x'_0, y_0 = c.y_0)$ est une solution de la première équation.
D'où $a(x - x_0) = b(y - y_0)$.
On applique Gauss une fois : $y_0 - y = k.a$, puis on report :$x - x_0 = k.b$.

Entiers relatifs

1 Divisibilité

Définition
On dit que b *divise* a ou que a est un multiple de b s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k.b$.

Theorème
Les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$ sont exactement les ensembles $n.\mathbb{Z}$.

Propriétés :
- $a\,divise\,b$ et $a\,divise\,c \Rightarrow \forall k, l \in \mathbb{N}, a\,divise(k.b + l.c)$
- $a\,divise\,b \Rightarrow a^n\,divise\,b^n$

2 Division euclidienne

Theorème

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{N}^*, \exists!(q, r) \in \mathbb{Z}^2, a = b.q + r \text{ et } 0 \leq r < b$$

Définition
$a \equiv b[n]$ si $a - b \in n.\mathbb{Z}$.

Propriétés :
- La relation de congruence modulo n est une relation d'équvalence.
- L'addition et le produit sont compatibles avec la relation de congruence modulo n.
- $a \equiv b[n] \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}, a^p \equiv b^p[n]$
- $a \equiv b[n]$ si et seulement si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.
- Le reste de a dans la division euclidienne par n est $r \Leftrightarrow a \equiv r[n]$.

3 *PPCM* et *PGCD*

Theorème

$$\exists! m \in \mathbb{N}^*, a.\mathbb{Z} \bigcap b.\mathbb{Z} = m.\mathbb{Z}$$

m est le *PPCM* de a et b. On le note $m = a \vee b$.

Propriétés :
- $a \vee b = |a| \vee |b|$
- $a\,divise\,b \Leftrightarrow a \vee b = |b|$
- si $c \neq 0, (c.a) \vee (c.b) = |c| .(a \vee b)$.

Theorème

$$\exists! d \in \mathbb{N}^*, a.\mathbb{Z} + b.\mathbb{Z} = d.\mathbb{Z}$$

d est le $PGCD$de a et b.

Propriétés :

- $a \wedge b = |a| \wedge |b|$
- $a \, divise \, b \Leftrightarrow a \wedge b = |a|$
- si $c \neq 0, (c.a) \wedge (c.b) = |c| .(a \wedge b)$.
- Extension : si $a \neq 0, a \wedge 0 \, |a|$.

4 Algorithme d'Euclide

Lemme

$$a = b.q + r \Rightarrow a \wedge b = b \wedge r$$

Principe

Etape 1:

$$a = b.q_1 + r_1 \text{ et } 0 \leq r_1 < b$$
$$d = a \wedge b = b \wedge r_1$$

Si $r_1 = 0, d = b$: fin.

Etape 2:

$$b = r_1.q_2 + r_2 \text{ et } 0 \leq r_2 < r_1$$
$$d = r_1 \wedge r_2$$

Si $r_2 = 0, d = r_1$: fin.

...

Exemple :

	$1(q)$	1	23	2
$3264(a)$	$1666(b)$	1598	68	34
$1598(r)$	68	238	0	
		34		

$$1666 \wedge 3264 = 34$$

Application

$$d.\mathbb{Z} = a.\mathbb{Z} + b.\mathbb{Z} \Rightarrow d \in a.\mathbb{Z} + b.\mathbb{Z} \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}, d = k.a + l.b$$

Technique :

- Réecrire les divisions.
- 'Remonter' les restes.

Exemple :

$$\begin{array}{rcrcl}
34 = & & 1598 & - & 68 * 23 \\
34 = & & 1598 & - & (1666 - 1598 * 1) * 23 \\
34 = & & 24 * 1598 & - & 23 * 1666 \\
34 = & & 24 * (3264 - 166 * 1) & - & 23 * 1666 \\
34 = & & 24 * 3264 & - & 47 * 1666
\end{array}$$

5 Nombres premiers entre eux

Définition

a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$.

Theorème de Bézout

$$a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \Leftrightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}^*, k.a + l.b = 1$$

Theorème de Gauss

$$\left\{ \begin{array}{c} a\,divise\,b.c \\ a \text{ premier avec } c \end{array} \right. \Rightarrow a\,divise\,c$$

Theorème

- a premier avec $b_1, \ldots, b_n \Rightarrow a$ premier avec $\prod b_i$.
- a premier avec $b \Rightarrow a$ premier avec b^n.
- $\left\{ \begin{array}{c} a_1\,divise\,b \\ a_2\,divise\,b \\ \ldots divise\,b \\ a_n\,divise\,b \end{array} \right.$ et a_i premier entre eux deux à deux $\Rightarrow \prod a_n\,divise\,b$.

Theorème

Tout nombre rationnel r admet une unique représentation irréductible $r = \dfrac{a}{b}$ avec $\left\{ \begin{array}{c} b > 0 \\ a \wedge b = 1 \end{array} \right.$

Réels

1 Propriétés admises

- $(\mathbb{R}, +, *, \leq)$ est un corps totalement ordonné contenat $\mathbb{Q}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! p \in \mathbb{Z}, p \leq x < p+1$. On note $p = E(x)$ la partie entière de x.
- Toute partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide, minorée admet une borne inférieure.

Theorème
Soit $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ et A majorée.

$$\alpha = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha \\ \forall \epsilon > 0, \exists a \in A, \alpha - \epsilon < a \leq \alpha \end{cases}$$

Theorème
Soit $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ et A minorée.

$$\alpha = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \alpha \leq c \\ \forall \epsilon > 0, \exists a \in A, \alpha < a \leq \alpha + \epsilon \end{cases}$$

2 Valeur absolue

Définition

$$|x| = \max(\{x, -x\})$$

C'est une norme.
Propriétés

$$\begin{aligned} ||x| - |y|| &\leq |x+y| \\ |x.y| &= |x| \,.\, |y| \\ \left|\frac{x}{y}\right| &= \frac{|x|}{|y|} \end{aligned}$$

3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x \leq y, [x,y] = \{t \in \mathbb{R}, x \leq t \leq y\}$.
Si $x > y, [x,y] = [y,x]$.

Définition
Toute partie I de $\mathbb{R}$ telle que si $x \in I$ et $y \in I$, alors $[x,y] \in I$.

$\mathbb{C}$

1 Définition

On définit dans $\mathbb{R}^2$ les lois suivantes :

$$\left\{\begin{array}{llr} L.C.E & \cdot & \lambda\cdot(x,y){=}(\lambda x,\lambda y) \\ L.C.I & + & (x,y)+(x',y'){=}(x+x',y+y') \\ L.C.I & \times & (x,y)\times(x',y'){=}(xx'-yy',xy'+x'y) \end{array}\right.$$

Theorème
$(\mathbb{R}^2,+,\times)$ est un corps.
$(\mathbb{R}^2,+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.
Ecriture usuelle des complexes

$$\imath=(0,1)$$
$$\mathbb{C}=\left\{z=x+\imath.y/x,y\in\mathbb{R}^2\right\}$$

2 Conjugaison

$$\begin{array}{rcl} \overline{z+z'} & = & \overline{z}+\overline{z'} \\ \overline{z.z'} & = & \overline{z}.\overline{z'} \\ \overline{\overline{z}} & = & z \\ \overline{\dfrac{1}{z}} & = & \dfrac{1}{\overline{z}} \\ \Re(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2} & \text{et} & \Im(z)=\dfrac{z-z'}{2} \\ z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z} & \text{et} & z\in\imath.\mathbb{R}\Leftrightarrow z=-\overline{z} \end{array}$$

3 Module

Définition
Soit $z=x+\imath.y$ avec $x,y\in\mathbb{R}$.

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z.\overline{z}}$$

Le module a les propriétés d'une norme.
Propriétés

$$\begin{array}{rcl} ||z|-|z'|| & \leq & |z+z'| \\ |z|=|\overline{z}| & = & |z|=|-z| \\ |z.z'| & = & |z|\,.\,|z'| \\ \left|\dfrac{z}{z'}\right| & = & \dfrac{|z|}{|z'|} \\ \dfrac{1}{z} & = & \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} \end{array}$$

4 Groupe des complexes de module 1

Définition

$$U = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| = 1\}$$

Theorème
$(U, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Theorème
Soit $\varphi \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & U \\ t & \mapsto & \exp(\imath.t) \end{array} \right.$.
φ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(U, \times)$ de noyau $\ker(\varphi) = 2.\pi.\mathbb{Z}$.
Formule de MOIVRE

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \cos(n.t) + \imath.\sin(n.t) = (\cos(t) + \imath.\sin(t))^n$$

Egalité

$$\exp(\imath.t) = \exp(\imath.t') \Leftrightarrow t' - t \in 2.\pi.\mathbb{Z}$$

5 Forme trigonométrique

Theorème
L'application $\varphi \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+^* \times U & \to & \mathbb{C}^* \\ (r, u) & \mapsto & r.u \end{array} \right.$ est un isomorphisme de groupes.

Theorème
Tout complexe non nul z admet donc une écriture unique de la forme $z = r.u$ avec $u \in U$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
Propriétés

$$\begin{aligned} \arg(z.z') &= \arg(z) + \arg(z')[2\pi] \\ \arg(z^n) &= n.\arg(z)[2\pi] \\ \arg(\frac{z}{z'}) &= \arg z - \arg z'[2\pi] \\ \arg(\overline{z}) &= -\arg(z)[2\pi] \end{aligned}$$

Groupe orthogonal

1 Endomorphisme orthogonaux

Définition
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, si f conserve la norme ou si f conserve le produit scalaire. On dit que f est un endomorphisme orthogonal ou isométrie vectorielle.

Theorème
Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$:
- $f \in \mathscr{O}(E)$
- Pour toute BON $\mathscr{B}$ de E, $f(\mathscr{B})$ est une BON.
- Il existe une BON $\mathscr{B}$ de E telle que $f(\mathscr{B})$ est une BON.

Theorème
$(\mathscr{O}(E), o)$ est un sous-groupe de $(GL(E), o)$.

Propriétés :
- $\mathscr{S}_{P,\mathscr{R}}(f) \in \{-1; 1\}$
- $E_f(1) \perp E_f(-1)$
- Si F est un sev de E stable par f alors $F^\perp$ est stable par f, $f_F \in \mathscr{O}(F)$ et $f_{F^\perp} \in \mathscr{O}(F^\perp)$.

2 Matrices orthogonales

Définition
$A \in M_n(\mathbb{R})$, A est orthogonale si ${}^tA.A = I_n$.
Ensemble : $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathscr{O}(n)$.

Theorème
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $A \in \mathscr{O}(n)$
- A régulière et $A^{-1} = {}^tA$
- ${}^tA \in \mathscr{O}(n)$
- Les vecteurs colonnes/lignes de A forment une BON de $\mathbb{R}^n$.
- $A = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} BON$

Theorème
Si $f \in \mathscr{L}(E)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $f \in \mathscr{O}(E)$
- Pour toute BON de E, $M_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{O}(n)$.
- Il existe une BON $\mathscr{B}$ de E telle que $M_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{O}(n)$.

Theorème
$(\mathscr{O}(n), x)$ est un groupe isomorphe à $(\mathscr{O}(E), o)$

Définition

$$\mathscr{S}\mathscr{O}(n) = \mathscr{O}^+(n) = \{A \in \mathscr{O}(n), \det(A) = 1\}$$

de même on définit $\mathscr{S}\mathscr{O}(E)$ qui est l'ensemble des isométries vectorielles postitives.

3 Automorphismes orthogonaux du plan

3.1 Etude

Type I	Type II
$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ ou bien $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ ou bien $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$
$\det(A) = 1$ donc $A \in \mathscr{S}\mathscr{O}(2)$	$\det(A) = -1$ donc $A \in \mathscr{O}^-(2)$

3.2 Etude de $\mathscr{S}\mathscr{O}(E)$

Theorème
$\mathscr{S}\mathscr{O}(2)$ est commutatif.

Définition
Soient $f \in \mathscr{S}\mathscr{O}(E)$ et $\mathscr{B} une$BONDde E.
$M_{\mathscr{B}}(f)$ est de type I. L'angle attaché à l'application f est l'angle de la matrice associée.
Etude d'une rotation

$$z' = \exp(\imath.\alpha).z$$

3.3 Etude de $\mathscr{O}^-(E)$

Theorème
$\mathscr{O}^-(E)$ est l'ensemble des réflexion (symétrie orthogonale par rapport à une droite).

Définition

- Axe de la symétrie : $\ker(f - id_E)$.
- Direction de la symétrie : $Im(f + id_E)$.

4 Automorphisme orthogonaux de l'espace

Il y a quatre types d'applications orthogonales.

Définition

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3)$$

$f = R_{\overrightarrow{k},\theta}$ est une rotation d'axe $\overrightarrow{k}$ et d'angle θ.

Propriétés :

- Si $\theta = 0[2\pi]$, $f = id_E$.
- si $\theta = \pi[2\pi]$, $f = S_F$ (demi-tour).

Définition

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O^-(3)$$

f est une réflexion.

Définition

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in O^-(3)$$

f est une isométrie vectorielle gauche.

Définition

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in SO(3)$$

f est une symétrie.

Theorème

Soit $f = S_{P_2} o S_{P_1}$.
Si $P_1 = P_2$, $f = id_E$.
Si $P_1 \neq P_2$:
$P_1 \bigcap P_2 = D$, on pose $D = Vect(\overrightarrow{k})$.

$$S_{P_2} o S_{P_1} = R_{\overrightarrow{k},2.\alpha}$$

Theorème

Les réflexions engendrent $\mathscr{O}(E_3)$.

Theorème

$$\forall \overrightarrow{x} \in D^\perp, f(\overrightarrow{x} = \cos(\theta).\overrightarrow{x} + \sin(\theta).\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{x}$$

Axe

Ensemble des vecteurs invariants : $D = Inv(f) = \ker(f - id_E)$.
On résoud : $(A - I_3).X = 0$.

Angle

Si on connait $\overrightarrow{x} \in D^{\perp}$:

- $\overrightarrow{x} \cdot f(\overrightarrow{x}) = \cos(\theta).\left\|\overrightarrow{x}\right\|^2$
- $\overrightarrow{x} \wedge f(\overrightarrow{x}) = \sin(\theta).\left\|\overrightarrow{x}\right\|^2.\overrightarrow{k}$

Sinon $\cos(\theta) = \dfrac{Tr(A)-1}{2}$ et $\sin(\theta)$ est de même signe que $[\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{k}]$ avec $x \notin D^{\perp}$.

Polynômes

1 Algèbre $\mathbb{K}[X]$

Définition
On appelle polynôme sur K toute suite $p = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ presque nulle d'éléments de K.

Theorème
L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

Theorème
$\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.

Theorème
$(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$ est une K-algèbre commutative.

Propriétés :
- $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$
- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$
- $val(P \times Q) = val\, P + val\, Q$
- $val(P + Q) \geq \min(val\, P, val\, Q)$

Définition
Deux polynômes sont associés s'ils diffèrent d'un constante multiplicative non nulle.

Définition
Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux $\mathbb{K}$-algèbre.
Un morphisme de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}$ est une application qui est à la fois un morphisme d'anneaux et une application linéaire.

Theorème
Soit $(\mathscr{A}, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Pour a fixé dans $\mathscr{A}$, $f : P \to P(a)$ est un morphisme de l'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{A}$.
$Im(f) = \{P(a), P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathscr{A}$.
Si $\ker(f) = \{0\}$, f est injective, dans ce cas $(1_{\mathscr{A}}, a, \ldots, a^n, \ldots)$ est une base de $Im(f)$.
Si $\ker(f) \neq \{0\}$, l'unique polynôme unitaire P_0 tel que $\ker(f) = P_0.\mathbb{K}[X]$ est appelé le polynôme minimal de a.
Si $\deg(P_0) = n$, $(1_{\mathscr{A}}, a, \ldots, a^{p-1})$ est une base de $Im(f)$.

2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Theorème
Pour tout polynôme $A, B \in \mathbb{K}[X]$, si $B \neq 0$, alors il existe un couple unique (P, Q) tel que $A = BQ+R$ avec $\deg R < \deg B$.

Définition
A est multiple de B ou B divise A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.
On note : $B_{/A}$.

Propriétés :
- $A_{/B} et B_{/C} \Rightarrow A_{/C}$
- $A_{/B} et B_{/A} \Rightarrow A$ et B associés.
- $\forall U, V \in \mathbb{K}[X], A_{/B} et A_{/C} \Rightarrow A_{/U.B+V.C}$

Theorème
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in K$: α racine de $P \Leftrightarrow X - \alpha$ divise P.

Theorème
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P = n, n \in \mathbb{N}$, alors P a au plus n racines distinctes dans K.

3 Polynôme dérivé

Formule de Leibniz

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

Définition
α est racine de multiplicité d'ordre k des polynômes P si $\left\{ \begin{array}{c} (X-\alpha)^k \text{divise} P \\ (X-\alpha)^{k+1} \text{ne divise pas} P \end{array} \right.$.

Theorème
α est racine d'ordre k de $P \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X-\alpha)^k.Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$

4 Relations entre coefficient et racines

Définition
$P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé s'il existe :
- $\lambda \in K^{\times}$
- $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$

tels que $P = \lambda(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_n)$.

Theorème de d'Alembert
Tout polynôme, non constant, de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Définition
Les trois fonctions symétriques élémentaires des racines d'un polynômes $P = a.X^3 + b.X^2 + c.X + d$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_1 = & x_1 + x_2 + x_3 & = -\frac{b}{a} \\ \sigma_2 = & x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 & = \frac{c}{a} \\ \sigma_3 = & x_1.x_2.x_3 & = -\frac{d}{a} \end{array} \right.$$

Theorème
α est racine d'ordre k de $P \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{array} \right.$.

Theorème
$P \in \mathbb{K}[X]$ admettant r racines distinctes α_i d'ordre k_i. Alors $P = (X-\alpha_1)^{k_1} \ldots (X-\alpha_n)^{k_n}.Q$. $\forall i, Q(\alpha_i) \neq 0$.

5 Arithmétique

Définition
Soit $I = P.\mathbb{K}[X] + Q.\mathbb{K}[X]$.
L'unique polynôme unitaire D tel que $I = D.\mathbb{K}[X]$ est appelé le $PGCD$de P et Q.
Tout diviseur commun à P et Q est un diviseur de leur $PGCD$.
De plus $\exists U, V \in \mathbb{K}[X], P.U + Q.V = D$.

Définition
Soit $I = P.\mathbb{K}[X] \bigcap Q.\mathbb{K}[X]$.
L'unique polynôme unitaire d tel que $I = d.\mathbb{K}[X]$ est appelé le $PPCM$de P et Q.
Parmis les multiples communs à P et Q, c'est celui dont le degré est le pus petit.

Theorème de Bézout

$$A \wedge B = 1 \Leftrightarrow \exists U, V \in \mathbb{K}[X], U.A + B.V = 1$$

Theorème de Gauss
$A_{/BC}$ et $A \wedge B = 1 \Rightarrow A_{/C}$.

Theorème
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré ≥ 1, alors P s'écrit de façon unique(à l'ordre près) sous la forme : $P = \lambda.Q_1^{\alpha_1}.\ldots.Q_s^{\alpha_s}$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*, Q_i$ des polynômes irréductibles unitaires deux à deux distincts, α_i des entiers ≥ 1.

Définition
$P \in \mathbb{K}[X]$, P est irréductible si $\deg P = 1$ et les seuls diviseurs de P dans $\mathbb{K}[X]$ sont 1,P et les polynômes associés α et αP.

Theorème
Dans $\mathbb{K}[X]$, tout polynôme de degré 1 est irréductible.

Theorème
Tout polynôme P de degré ≥ 1 se décompose comme produit de polynômes irréductibles.

6 Polynômes réciproques

Définition
Soit $P(X) = a_n.X^n a_{n-1}.X^{n-1} + \ldots + a_1.X + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.
On pose $Q = a_0.X^n + a_1.X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}.X + a_n$.
P est un polynôme réciproque si $Q = P$ (réciproque de première éspèce) ou $Q = -p$ (réciproque de seconde espèce).

Theorème

Si P est un polynôme réciproque et $P(\alpha) = 0$, alors $P(\dfrac{1}{\alpha}) = 0$.

Méthode

Soit Q un polynôme réciproque de première espèce de degré n pair.

On factorise par $X^{\frac{n}{2}}$ puis on fait le changement de variable $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

1 Généralités

Définition
Si A est un anneau intègre, on peut construire son corps des fractions (le plus petit corps contenant A).
Le corps des fractions de $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Q}$.
Le corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$ est $\mathbb{K}(X)$.

Définition
Soit $F = \dfrac{P}{Q}$. On dit que F est irréductible si $P \wedge Q = 1$.

Définition
Soit $F = \dfrac{P}{Q}$.

$$\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$$

Définition
Les zéros d'une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q}$ sont les racines de P.
Les pôles de F sont les racines de Q.

Theorème
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, alors il exists un polynôme unique $E \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(F - E) < 0$.
E est la partie entière de F.

2 Décomposition des fractions en éléments simples

On ne considère que les fractions de degré négatif.

Theorème
$F = \dfrac{A}{B_1.B_2}$ avec $\deg(F) < 0$ et $B_1 \wedge B_2 = 1$.
Il existe deux polynômes A_1 et $A_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que :
$F = \dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2}$ avec $\deg(\dfrac{A_i}{B_i}) < 0$.
Ce théorème ce généralise par récurrence pour $F = \dfrac{A}{B_1. \dots .\mathscr{B}_n}$.

Theorème
$F = \dfrac{A}{B^n}$ avec $\deg(F) > 0$ et $\deg(B) \geq 1$.
Il existe des polynômes $C_1, \dots, C_n$ tels que : $F = \dfrac{C_n}{B^n} + \dfrac{C_{n_1}}{B^{n-1}} + \dots + \dfrac{C_1}{B^1}$ avec $\deg(\dfrac{C_i}{B^i} < 0$.

Theorème

Toute fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{(X-\alpha_1)^{k_1}.\dots.(X-\alpha_n)^{n_k}}$ de $\mathbb{C}(X)$ se décompose de façon unique sous la forme :

$$F = \begin{array}{l} E + \dfrac{a_{k_1}}{(X-\alpha_1)^{k_1}} + \dfrac{a_{k_1-1}}{(X-\alpha_1)^{k_1-1}} + \dots + \dfrac{a_1}{(X-\alpha_1)} \\ + \dfrac{a_{k_1}}{(X-\alpha_1)^{k_1}} + \dfrac{a_{k_1-1}}{(X-\alpha_1)^{k_1-1}} + \dots + \dfrac{a_1}{(X-\alpha_1)} \\ + \quad \dots \quad + \quad \dots \quad + \dots + \quad \dots \\ + \dfrac{a_{k_1}}{(X-\alpha_1)^{k_1}} + \dfrac{a_{k_1-1}}{(X-\alpha_1)^{k_1-1}} + \dots + \dfrac{a_1}{(X-\alpha_1)} \end{array}$$

Méthode

- Penser à la partie entière.
- Etudier la parité.
- On multiplie par $(X-\alpha)$ et on pose $X=\alpha$.
- Calcul d'un pôle simple :
  $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{(X-\alpha).Q_1}$ avec $Q_1(\alpha) \neq 0$.
  La partie polaire relative au pôle α est $\dfrac{\lambda}{X-\alpha}$ avec $\lambda = \dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = \dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.
- Calcul d'un pôle multiple :
  Si F admet a pour pôle d'ordre n.
  On cherchera le DL_{n-1} de $(X-a)^n.F(X)$ au point a.

Espaces vectoriels

1 EV sur un corps $\mathbb{K}$

Définition

E est un $\mathbb{K}$-EV s'il existe dans E :

- une L.C.I $+$,
- une L.C.E $\cdot$ à opérateurs dans $\mathbb{K}$,
- $(E, +)$ est un groupe abélien,
- $\lambda.(u+v) = \lambda.u + \lambda.v$,
- $(\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$,
- $\lambda.(\mu.u) = (\lambda.\mu).u$,
- $1.u = u$

Propriétés :

- $\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.
- $(-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x)$.

2 SEV

Définition

On dit que F est un SEV de E si :

- $F \subset E$,
- $F \neq \emptyset$,
- F stable pour $+$,
- F stable pour $\cdot$.

Theorème

Soient E un $\mathbb{K}$-EV et $(F_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de SEV de E.

$$\bigcap_{i \in I} F_i \text{ est un SEV de } E$$

Définition

Soit $A \subset E$.
L'intersection de tous les SEV de E contenant A est un SEV de E. On le note $Vect(A)$.

Theorème

$Vect(A)$ est au sens de l'inclusion le plus petit SEV de E contenant A.

$$Vect(A) = A \Leftrightarrow A \text{ est un SEV de } E$$

Theorème

Si $A = (x_1, \dots, x_n)$, alors $Vect(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de A.
Le résultat se généralise à une famille infinie.

3 Somme de deux SEV

Définition
Soient E_1 et E_2 deux SEV de E.

$$E_1 + E_2 = \{x \in E, \exists x_1 \in E_1, \exists x_2 \in E_2, x = x_1 + x_2\}$$

Theorème

$$E_1 + E_2 = Vect\, E_1 \bigcup E_2$$

Propriétés :

- L'ensemble des SEV de E muni de $+$ est un monoïde commutatif.
- $E_1 + E_2 = E_1 \Leftrightarrow E_2 \subset E_1$

Theorème
Soient E_1, E_2 deux SEV de E.

$$E_1 \bigcap E_2 = \{0_E\} \Leftrightarrow \forall x \in E_1 + E_2, \exists! x_1 \in E_1, \exists! x_2 \in E_2, x = x_1 + x_2$$

Dans cette situation on dira que la somme $F = E_1 + E_2$ est directe. On notera $F = E_1 \oplus E_2$.

Définition
Si $E_1 \oplus E_2 = E$, on dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.

Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-EV et $F_1, \dots, F_n$ des SEV de E.
La somme $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$ est dite directe si pour tout $z \in F$, z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x_1, \dots, x_n$, avec $x_i \in F_i$.
On écrit alors: $F = F_1 \oplus \dots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

4 Familles

Définition
Soit $A = (x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i \in E$.
On dit que A est liée s'il existe n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i . x_i = 0_E$.

Définition
A est libre si A est non liée, i-e

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . x_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

.
Une famille $(x_i, i \in I)$ d'éléments de E est libre lorsque toute sous-famille finie est libre.

Propriétés :

- Une famille contenat 0_E est liée.
- Toute sous famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur famille d'une famille liée est liée.
- $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille liée si et seulement si l'un des vecteurs x_i est une combinaison linéaire des autres.

Définition

Soit $A = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que A est génératrice si $Vect(A) = E$.
$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i.x_i$.

Définition

Soit $A = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

$$rg(A) = dim(Vect(x_1, \ldots, x_n))$$

5 Bases

Theorème

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E.

$$\mathscr{B} \text{ est libre et génératrice} \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i.x_i$$

Dans cette situation on dira que $\mathscr{B}$ est une base de E.

6 Codimension

Theorème

Soient E un $\mathbb{K}$-EV , F un SEV de E, G un supplémentaire de F dans E.
Si G est de dimension finie q, tous les supplémentaires de F sont de dimension q.
On dit que q est la codimension de F.
Si E est de dimension finie : $dim(E) = dim(F) + codim(F)$.

Définition

Dans un EV E, on appelle hyperplan (vectoriel) un SEV H de codimension 1, c'est donc un SEV qui admet pour supplémentaire une droite vectorielle.

Theorème

Soient H un hyperplan de E et u un vecteur de E tel que $u \notin H$.
Alors : la droite vectorielle $D = Vect(u)$ est une droite supplémentaire de H.

Theorème

Soit $E = \bigoplus F_i$. Une application linéaire de E dans F est parfaitement détermionée par ses composantes suivant chacun des SEV E_i.

Espaces vectoriels de dimension finie

1 Généralités

Theorème de l'échange
Soient $G = (g_1, \dots, g_p)$ une famille génératrice de E et $L = (l_1, \dots, l_q)$ une famille libre de E avec $Card(L) \leq Card(G)$.
Alors $(l_1, \dots, l_q, g_{q+1}, \dots, g_p)$ est liée.

Theorème
Tout EV de dimension finie admet au moins une base.
Toutes les bases de E ont le même cardinal.

Définition
La dimension de l'espace E est le cardinal d'une des bases de E.

Theorème
Soient E et F deux EV de dimension finie, alors $E \times F$ est de dimension finie :

$$dim(E \times F) = dim(E) + dim(F)$$

2 Propriétés des EV de dimension finie

Theorème
Soit E un EV de dimension n.
Toute famille libre de E a au plus n vecteur. Si elle en a exactement n, alors c'est une base.

Theorème
Soit E un EV de dimension n.
Toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs. Si elle en a n exactement, alors c'est une base.

Theorème de la base incomplète
Soit E un EV de dimension n.
Soit $L = (l_1, \dots, l_p)$ une famille libre de E.
Alors : il existe $n - p$ vecteurs $g_{p+1}, \dots, g_n$ de E tels que la famille $\mathscr{B} = (l_1, \dots, l_p, g_{p+1}, \dots, g_n)$ est une base de E.

Theorème
Soit E un EV de dimension finie et F un SEV de E.

- F est de dimension finie.
- $dim(F) \leq dim(E)$
- $dim(F) = dim(E) \Leftrightarrow F = E$.

Theorème

Soit E un EV de dimension finie.
Tout SEV F de E admet au moins un SEV G supplémentaire dans E.

Theorème

Soit E un EV de dimension n.
Soient F et G deux SEV de E.

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \text{la concaténation des bases de } F \text{ et } G \text{ est une base de } E$$

Theorème

$$dim(F \oplus G) = dim(F) + dim(G)$$

$$dim(F + G)\, dim(F) + dim(G) - dim(F \bigcap G)$$

Espaces vectoriels normés

1 Généralités

$$E = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} - ev$$

Définition
Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}$ telle que

- $\forall x \in E, N(x) \geq 0$
- $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$
- $\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Définition
Un EVN est un EV muni d'une norme.

Propriétés :

- $\forall x \in E, N(-x) = N(x)$
- Dans la défition, on peut se contenter de montrer que : $N(x) > 0$ pour tout $x \neq 0 \in E$.
- $\forall x, y \in E : |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$

Définition
Deux normes N_1 et N_2 définies sur E sont dites équivalentes si :

$$\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in E, \left\{ \begin{array}{l} N_1(x) \leq \alpha N_2(x) \\ N_2(x) \leq \beta N_1(x) \end{array} \right.$$

Définition
On dit que d est une distance si :

- $\forall x, y \in E, d(x, y) \geq 0$
- $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Définition
La distance associée à une norme de E est une application $d \left| \begin{array}{lll} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & d(x, y) = N(x - y) \end{array} \right.$.

Définition
Une fonction $f : A \to F$ est dite bornée si : $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, N(f(x)) \leq M$.
Produit de deux EVN
Si $(E_1, N_1), \ldots, (E_n, N_n)$ sont p EVN sur $\mathbb{K}$, on définit une norme sur $E = E_1 \times \ldots \times E_n$:

$$\sup_{1 \leq i \leq n} N_i(x_i)$$

Définition
Soit $(E, +, \cdot, \times)$ une algèbre sur $\mathbb{K}$.
Une norme définies sur l'EV E est dite une norme d'algèbre si elle vérifie:

- $N(1_E) = 1$
- $\forall x, y \in E, N(xy) \leq N(x).N(y)$

2 Topologie d'un EVN

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN .

Définition
Boule ouverte de centre $a \in E$, de rayon $r > 0$:

$$B(a, r) = \{x \in E / \|a - x\| < r\}$$

Boule fermée de centre $a \in E$, de rayon $r \geq 0$:

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E / \|a - x\| \leq r\}$$

Sphère centre $a \in E$, de rayon $r > 0$:

$$S(a, r) = \{x \in E / \|a - x\| = r\}$$

Définition
Soit A une partie d'un EVN .
A est dite bornée si elle est incluse dans une boule.
Définition
Distance d'un point à une partie A non vide d'un EVN :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

Définition
Soit $a \in E$ et V une partie de E.
On dit que V est un voisinage de a si :

$$\exists r > 0, B(a, r) \subset V$$

Définition
Une partie A de E est dite ouverte si $A = \emptyset$ ou si A est voisinage de chacun de ses points.

Propriétés :

- $\emptyset$ et E sont ouverts.
- Si $(A_i, i \in I)$ est une famille d'ouverts, $\bigcup_{i \in I} A_i$ est ouverte.
- Si A et B sont ouverts, $A \bigcap B$ est ouvert.

Définition
Une partie A de E est dite fermée si $\complement_E A$ est ouvert.

Propriétés :

- $\emptyset$ et E sont fermés.
- Si $(A_i, i \in I)$ est une famille de fermés, $\bigcap_{i\in I} A_i$ est fermée.
- Si A et B sont fermés, $A \bigcup B$ est ouvert.

Définition
Soient A une partie de A et $a \in E$.
On dit due a est intérieur à A si A est un voissinage de a.
L'ensemble des points intérieurs de A est appelé l'intérieur de A et est noté $\check{A}$.

Propriétés :

- $\check{A} \subset A$
- $\check{A}$ est le plus grand des ensembles ouverts inclus dans A.
- $A \subset E$ est ouverte $\Leftrightarrow A = \check{A}$.

Définition
Soient $A \subset E$ et $a \in E$.
On dit que a est adhérent à A si tout voisinage de A rencontre A.

$$\forall r > 0, B(a, r) \bigcap A \neq \emptyset$$

L'ensemble des points de E adhérents à A est l'adhérence de A, notée $\overline{A}$.

Propriétés :

- $A \subset \overline{A}$
- $\overline{A}$ est le plus petit des ensembles fermés contenant A.
- $A \subset E$ ets fermée $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

Définition
On dit qu'un point x de E appartient à la frontière de A si $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{\complement_E A}$.

$$Fr(A) = \overline{A} \bigcap \overline{\complement_E A} = \overline{A} \backslash \check{A}$$

Définition
Soient A, B deux parties de E, avec $A \subset B$.
On dit que A est dense dans B si $A \subset B \subset \overline{A}$.
Une partie A de E est dite partout dense si elle est dense dans E, donc si $\overline{A} = E$.

3 Suites dans un EVN

4 Suites dans un EV

Définition
Si $x = (x_i, i \in I)$ est une suite d'éléments de E, l'ensemble $S = \{i \in I / x_i \neq 0_E\}$ est appelé le support de la suite x. Lorsque S est fini, on dit que la suite est de support fini. On note $E^{(I)}$ l'ensemble des suites à support fini, c'est un SEV de $\mathscr{F}(I, E)$.

Définition
Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E est dite convergente dans E, s'il existe $l \in E$ tel que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in NN, \forall n \geq N, \|l - x_n\| \leq \epsilon$$

Définition
La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente s'il existe $l \in E$ tel que pour tout voisinage V de l :

$$\exists M \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow x_n \in V$$

Propriétés :

- l est unique.
- La convergence n'est pas modifiée lorsque l'on prend une norme équivalente.

Theorème
Dans un EVN produit, pour qu'une suite converge, il faut et il suffit que chacun des composantes converge.

Définition
Une suite $(x_n)_{n\ geq0}$ d'éléments de E est appelée suite de Cauchy si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \epsilon$$

Theorème
Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Propriétés :

- Une suite de Cauchy est bornée.
- L'ensemble des suites de Cauchy est un EV .

Theorème
Soit A une partie de E, $a \in E$.
$a \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\ geq0}$ d'éléments de A qui converge vers a.

Theorème
Pour qu'une partie A de E soit fermée, il faut et il suffit que toute suite convergente d'éléments de A converge vers un élément de A.

Définition
Soit $x \in E$.
x est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\ geq0}$ s'il existe une suite extraite de $(x_n)_{n\ geq0}$ qui converge vers a.

Theorème
x est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\ geq0} \Leftrightarrow$ pour tout voisinage V de x, l'ensemble des indices n tels que $x_n \in V$ soit infini.

Theorème
Une suite qui admet au moins deux valeurs d'adhérences discinctes n'est pas convergente.

5 Fonctions, limites, continuité

Définition
On dit que $f : D \to F$ admet une limite en a s'il existe un élément l de F tel que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \epsilon$$

.

Définition
On dit que $f : D \to F$ admet une limite en a s'il existe $l \in F$ tel que pour tout voisinage V de l dans F, il existe un voisinage U de a dans E tel que $x \in U \bigcap B \Rightarrow f(x) \in V$.

Définition
$f : D \to F$ est confitnue au point $a \in D$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \epsilon$$

Propriétés :
- Composition
- Linéarité
- Produit

Définition
On dit que $f(x)$ tend vers b quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > a, x \geq A, \|f(x) - b\| \leq \epsilon$$

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si :

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow f(x) > A$$

Définition
On dit que f est continue en un point a de D si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \epsilon$$

Définition
f est dite continue sur D si elle est continue en chaque point de D.

Propriétés :
- $\mathscr{C}^0(D, F)$ est un $\mathbb{K}$-EV .

- La continuité est invariante si on prend une norme équivalente.
- Linéarité.
- Composition.
- Produit.

Theorème

Soit $f \in \mathscr{F}(D, F)$.
$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \geq 0} \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers b.

Theorème

Soient $f : D \to F$ et $a \in D$.
f continue en $a \Leftrightarrow \forall (x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $a, \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Theorème

Soit $f \in \mathscr{C}^0(D, F)$.
Si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de D qui converge vers un élément de D, alors la suite $(f(x_n))$ est convergente.

6 Topologie induite sur une partie d'un EVN

Définition

Soit $a \in D$ et V une partie de D contenant a.
On dit que V est un voisinage de a dans D, s'il existe un voisinage V' de a dans E tel que $V = V' \bigcap D$.On dit que $V' \bigcap D$ est la trace de V sur D.

Définition

A est une partie ouverte de D, s'il existe un ouvert A' de E tel que $A = D \bigcap A'$.

Définition

A est une partie fermée de D, s'il existe un fermé A' de E tel que $A = D \bigcap A'$.

Propriétés :

- A ouverte dans $D \Leftrightarrow A$ est un voisinage dans D de chacun de ses points.
- Soit $D \subset A$:A ouverte dans $D \Leftrightarrow \complement_D A$ est fermé dans D.

Theorème

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
- f continue sur D.
- Pour toute partie ouverte B de F, $f^{-1}(B)$ est une partie ouverte de D.
- Pour toute partie fermée B de F, $f^{-1}(B)$ est une partie fermée de D

7 Continuité uniforme

Définition
f est dite uniformément continue sur D si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in D^2, \|x - y\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$$

.

Propriétés :
- La continuité uniforme ne dépend pas de la norme.
- f uniformément continue sur $D \Rightarrow f$ continue sur D.
- La conposition de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

8 Fonction Lipschitziennes

Définition
f est dite k-lipschitzienne si :

$$\exists k \geq 0, forall(x, y) \in D^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$$

Propriétés :
- Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.
- L'ensemble des fonctions Lipschitzienne est une EV .
- Composition.

9 Fonctions à valeurs dans un produit

Theorème
Les propriétés suivantes sont vraies si et seulement si elles sont verifiées pour chacune des fonctions composantes :
- f admet une limite au point $a \in \overline{D}$
- f est continue au point $a \in D$
- f est continue sur D
- f est uniformément continue sur D.
- f est lipschitzienne.

10 Partie compacte d'un EVN

Définition
Une partie K de E est dite compacte lorsque toute suite d'éléments de K possède au moins une valeur d'adhérence dans K.

Définition
Une partie K de E est dite compacte si de toute suite d'élément de K, on peut extraire une sous-suite convergente dans K.

Propriétés :

- Un singleton est une partie compacte de E.
- La réunion de deux parties compactes est compacte.

Theorème
Une partie compacte K de E est fermée bornée.

Theorème
Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$

Theorème
Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) sont les parties fermées bornées.

Theorème
Soient D une partie non vide compacte de E et $f : D \to F$ une application continue.
Alors : $f(D)$ est une partie compacte de F.

Theorème
Soient D une partie non vide compacte de E et $f : D \to F$ une application continue.
Alors : f est bornée sur D.

Theorème de Heine
Soient D une partie non vide compacte de E et $f : D \to F$ une application continue.
Alors : f est uniformément continue sur D.

11 Continuité des applications linéaires

Theorème
Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est continue au point $x = 0_E$
- f est bornée sur $\overline{B}_1 = \{x \in E / \|x\| \leq 1\}$
- f est continue sur E.

Theorème
L'ensemble $\mathscr{L}\mathscr{C}(E,F)$ (ou $l'(E,F)$) des applications linéaires continues de E dans F est un SEV de $\mathscr{L}(E,F)$.
Une norme sur $\mathscr{L}'(E,F)$
Pour $f \in \mathscr{L}'(E,F)$ on pose : $N(f) = \sup_{x \in B_1} \|f(x)\|$.

Theorème
Soit $f \in \mathscr{L}'(E,F)$.
$N(f)$ est le plus petit des nombres réels M tels que $\|f(x)\| \leq M \|x\|$.

Theorème

Soit $f \in \mathscr{L}'(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}'(F,G)$.

Alors :
- $gof \in \mathscr{L}'(E,G)$
- $N(gof) \leq N(g).N(f)$
- si $E = F = G$, alors N est une norme de l'algèbre $\mathscr{L}'(E)$.

Theorème
Soit f une application multilinéaire.
f continue $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in E, \|f(x_1), \ldots, f(x_n)\| \leq M.\|x_1\|_1 \ldots \|x_n\|_n$.
Pour cela il suffit que f soit bornée sur le produit des boules $\overline{B}_1 \times \cdots \times \overline{B}_p$

12 Cas des EV de dimension finie

Theorème
Sur E, il existe des normes et deux normes quelconques sont équivalentes.

Theorème
Si E et F sont des EVN de dimension finie , toute application linéaire de E dans F est continue.

Theorème
Soient $E_1, \ldots, E_n, F$ des EVN de dimension finie et $\varphi : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ multilinéaire.
Alors : φ est continue.

Theorème
$GL_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

13 Complétude

Définition
Une partie A de E est dite complète lorsque toute suite de Cauchy d'éléments de A converge vers un élément de A.
En particulier E est un EVN complet lorsque toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente.
$(E, \|\cdot\|)$ est alors appelé espace de Banach.

Theorème
Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux EVN .
A une partie complète de E et B une partie complète de F.
Alors : $A \times B$ est une partie complète de $E \times F$.

Theorème de Bolzano-Weierstrass
De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente.

Theorème
$\mathbb{R}$ est complet ($\mathbb{R}$ est un espace de Banach).

Theorème

Tout EVN de dimension finie est complet.

14 Convexité par arcs

Définition

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un EVN , U une partie non vide de E, A et B deux points de U.
Un chemin (ou arc) dans U d'origine A et d'extrémité B est une application continue $\varphi : [0;1] \to E$ telle que :

- $\varphi(0) = A$
- $\varphi(1) = B$
- $\forall t \in [0;1], \varphi(t) \in U$

Propriétés :

- Si $A \in U$, il existe un chemin dans U d'origine A et d'extrémité A.
- S'il existe dans U un chemin d'origine A et d'extrémité B, alors il existe un chemin d'origine B et d'extrémité A.
- S'il existe un chemin dans U d'origine A et d'extrémité B, un chemin d'origine B et d'extrémité C, alors il existe un chemin d'origine A et d'extrémité C.

Définition

Soit U une partie non vide de l'EVN E.
On dit que U est connexe par arc si pour tous points A et $B \in U$, il existe un chemin dans U d'origine A et d'extrémité B.

Theorème

Les parties connexes par arc de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Theorème

Soient E et F deux EVN , D une partie connexe par arc de E et $f \in \mathscr{C}^0(D, F)$.
Alors : $f(D)$ est une partie connexe par arc de F.

Theorème

Soient E un EVN , D une partie connexe par arc, $f \in \mathscr{C}^0(D, \mathbb{R})$.
Alors : $f(D)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Espaces hermitiens

Définition
Un espace hermitien est un EV de dimension finie sur $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire.

Theorème
Dans un espace hermitien E, il exists des bases orthonormales.

Theorème
Pour tout SEV F de E :

- $F \oplus F^{\perp} = E$
- $(F^{\perp^{\perp}} = F$

Propriétés :

- $< x, y >= {}^t\overline{X}Y$
- $\|x\|^2 = {}^t\overline{X}X$

Définition
Soit F un SEV de E. La projection vectorielle sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelée la projection orthogonale sur F.

Theorème
Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une BON de F et $X \in E$:

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < e_i, x > e_i$$

.

$$d^2(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$$

Espaces préhilbertiens réels ou complexes

1 Produit scalaire

1.1 Cas réel : $E = \mathbb{R}$-EV

Définition

Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique dont la forme quadratique associée est définie positive.

Définition

Un espace préhilbertien réel est un $\mathbb{R}$-EV muni d'un produit scalaire.

Propriétés :

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in E^3, \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2.\lambda. < x, y > + \|y\|^2$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x, y) \in E^2, < x, y >^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$.
- Si x et y sont non nuls on a $\cos \theta = \dfrac{< x, y >}{\|x\| \|y\|}$.

Propriétés :

- Relations de polarité :

$$< x, y >= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

$$< x, y >= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

- Identité du parallélogramme : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

1.2 Cas complexe : $E = \mathbb{C}-$EV

Définition

Un produit scalaire sur E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que :

- φ est linéaire à droite :

$$\forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \varphi(x, y + \lambda.z) = \varphi(x, y) + \lambda.\varphi(x, y)$$

- φ possède la propriété de symétrie hermitienne :

$$\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$$

- φ est définie positive.

Définition
Un espace préhilbertien complexe est un $\mathbb{C}$-EV muni d'un produit scalaire.

Propriétés :

- Relation de polarité :

$$\forall x, y \in E, < x, y >= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + \imath \|\imath x + y\|^2 - \imath \|-\imath x + y\|^2 - \|-x+y\|^2)$$

- Identité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

- Inégalité de Schwarz :

$$\forall x, y \in E, |< x, y >| \leq \|x\| . \|y\|$$

2 Orthogonalité

Définition

- Deux vecteurs x et y sont dit orthogonaux si $< x, y >= 0$
- Deux SEV F et G sont dits orthogonaux si $\forall (x, y) \in F \times G, < x, y >= 0$
- Si A est une partie de E, on appelle orthogonal de A et on note :

$$A^{\perp} = \{x \in E / \forall a \in A, < a, x >= 0\}$$

Propriétés :

- Pour toute partie A de E, $A^{\perp}$ est un SEV .
- $A^{\perp} = [Vect(A)]^{\perp}$
- $F \bigcap F^{\perp} = \emptyset$
- Si E est un EVN de dimension finie : $F \oplus F^{\perp} = E$
- $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$
- $A \subset A^{\perp^{\perp}}$
- $A \perp B \Leftrightarrow A \subset B^{\perp}$ ou $B \subset A^{\perp}$

Définition
Soit $(u_i, i \in I)$ une famille de vecteurs de E.
La famille est dite orthogonale si $\forall i \neq j, < u_i, u_j >= 0$.
La famille est dite orthonormale si $\forall i, j \in I, < u_i, u_J >= \delta_{ij}$.

Theorème
Une famille (u_i) orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Theorème de Pythagore
Soient $x, y \in E$ deux vecteurs orthogonaux. Alors : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
Si E est un $\mathbb{R}$-EV : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow x$ et y sont orthogonaux.

Theorème Généralisation

Si $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux orthogonaux.

Alors : : $\|x_1, ldots, x_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.

Theorème

Soit $(u_1, \dots, u_k, \dots)$ une famille dénombrable libre.

Alors : , il existe une famille $(e_1, \dots, e_k, \dots)$ telle que $\forall k, Vect(u_1, \dots, u_k) = Vect(e_1, \dots, e_k)$.

Theorème

Soit $(u_1, \dots, u_k, \dots)$ une famille libre.

Alors : il existe une famille orthonormale $(e'_1, \dots, e'_k, \dots)$ telle que $\forall k, Vect(u_1, \dots, u_k) = Vect(e'_1, \dots, e'_k)$

Theorème

Soit F un SEV de dimension finie de E.

Alors : F admet au moins une base orthonormale.

Theorème Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Pour toute base $U = (u_1, \dots, u_n)$ de E.

Il existe une unique base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que :

- $\mathscr{B}$ est une base orthonormale.
- $\forall k \in \{1, \dots, n\}, Vect(e_1, \dots, e_n) = Vect(u_1, \dots, u_n)$
- $e_k.u_k > 0$

3 Projection orthogonale sur un SEV de dimension finie

E un EV préhilbertien.

F un SEV de dimension finie de E.

Theorème

F admet une base orthonormale.

Theorème

$F \oplus F^{\perp} = E$

Définition

La projection vectorielle de F parallèlemet à $F^{\perp}$ est appelée projection orthogonale sur F.

On a donc : $\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$.

Définition

Soient P une partie non vide de E et $x \in E$.

On appelle distance de x à P le réel $d(x, P) = \inf_{y \in P} \|x - y\|$.

Theorème

Soient p_F la projection orthogonale de F et $x \in E$. On a $d(x, f)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$.

Espaces vectoriels euclidiens

1 Généralités

Définition
Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Theorème de la base orthonormale incomplète
Pour toute famille $(u_1, \dots, u_p)$ orthonormale de E, il existe $n-p$ vecteur $e_{p+1}, \dots, e_n$ tels que $\mathscr{B} = (_1, \dots, _p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une BON de E.

2 Usage des BON dans un espace vectoriel euclidien

Soit $x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
Soit $y \in E, y = \sum_{i=1}^{n} y_i.e_i; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Propriétés :

- $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i = {}^tX.Y = {}^tY.X$
- $\|x\| = {}^tX.X$
- $x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > .e_i$

3 Projecteurs orthogonaux

Définition
Soit F un SEV de E.
La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Theorème
Soit p un projecteur de E. p est un projecteur orthogonal $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, < p(x), y >=< x, p(y) >$

Theorème
Soient F un SEV de E et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_k)$ une BON de F.

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > .e_i$$

4 Symétries orthogonales

Définition
La symétrie orthogonale S_F par rapport à F est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

Theorème
Soit S une symétrie.
S est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, < S(x), y >=< x, S(y) >$.

Définition
Une réflexion est une symétrie orthogonale S_F où F est un hyperplan de E.

Définition
F un SEV de E et $a \in E$.
$dist(a, F) = \inf_{x\in F} \|a - x\|$.

Theorème
$dist(a, F) = \|a - p_F(a)\|$

5 Adjoint d'un endomorphisme

Theorème
Soient E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Alors : il existe un unique endomorphise $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall x, y \in E, < f(x), y >=< x, g(y) >$

Définition
L'unique endomorphisme g de E qui vérifie $\forall x, y \in E, < f(x), y >=< x, g(y) >$ est appelé l'adjoint de f. On le note f^*.

Propriétés :
- $f \mapsto f^*$ est un automorphisme involutif de $\mathscr{L}(E)$.
- $\forall f, g \in \mathscr{L}(E), (gof)^* = f^*og^*$
- $Id^* = Id$
- $\forall g \in Gl(E), (g^*)^{-1} = (g^{-1})^*$
- $\ker f^* = (Im\, f)^\perp$ et $Im\, f^* = (\ker f)^\perp$

Theorème
Soient $\mathscr{B}$ une BON de E, M la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
Alors : la matrice de f^* dans la base $\mathscr{B}$ est ${}^tM$.

Propriétés :
- f et f^* ont même déterminant, même trace, même polynôme caractéristique, mêmes valeurs propres.
- f diagonalisable $\Leftrightarrow f^*$ diagonalisable.
- f trigonalisable $\Leftrightarrow f^*$ trigonalisable.

6 Endomorphisme autoadjoint

Définition
$f \in \mathscr{L}(E)$ est autoadjoint (ou symétrique) si $f = f^*$.

Theorème
Soit M la matrice de f dans une BON .
f autoadjoint $\Leftrightarrow$ M symétrique.

Theorème
L'ensemble $\mathscr{S}(E)$ des endomorphismes symétriques de E est un SEV de $\mathscr{L}(E)$.
L'application $f \mapsto \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$ est une isomorphisme de $\mathscr{S}(E)$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

7 Automorphisme orthogonal

Définition
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
On dit que f est un automorphisme orthogonal si $fof^* = f^*of = Id_E$

Theorème
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

- f conserve la norme : $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.
- f conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E, < f(x), f(y) >=< x, y >$.
- f est un automorphisme orthogonal.

Theorème
L'ensemble $\mathscr{O}(E)$ des automorphismes orthogonaux de E est une sous-groupe de $Gl(E)$.

Propriétés :

- $(\det f)^2 = 1$
- Soit $f \in \mathscr{O}(E)$, alors ${}^{(}f) \subset \{-1, +1\}$
- Soit F un SEV stable par $f \in \mathscr{O}(E)$. Alors $({}^{\perp}F)$ est stable par f.
  Les endormorphismes f_F et $f_{F^\perp}$ induits par f sont orthogonaux.

Définition
Un automorphisme orthogonal f tel que $\det f = 1$ est appelé une rotation.
On note $\mathscr{O}_+(E)$ ou $\mathscr{S}\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des rotations.

Définition
$M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^tMM = M{}^tM = I_n$

Theorème
Soient $\mathscr{B}$ une BON de E et $f \in \mathscr{L}(E)$.
$f \in \mathscr{O}(E) \Leftrightarrow \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$

Theorème
$\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $Gl_n\mathbb{R}$.

Theorème

Soient $\mathscr{B}$ une BON de E et $\mathscr{U}$ un système de vecteur de E.
$\mathscr{U}$ est une BON de $E \Leftrightarrow$ la matrice de $\mathscr{U}$ dans la base $\mathscr{B}$ est orthogonale.

Theorème
Soit $\mathscr{B}$ une BON de E et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
$f \in \mathscr{O}(e) \Leftrightarrow f(\mathscr{B})$ est une BON .

Espaces affines

1 Introduction

En géométrie classique :

- Espace $\mathscr{E}$ contenant des points.
- Espace vectoriel $\mathscr{W}$ contenat des vecteurs.

Il existe une application $\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{E} \times \mathscr{E} & \to & \mathscr{W} \\ (A, B) & \mapsto & \overrightarrow{AB} \end{array} \right.$.

- Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\forall A \in \mathscr{E}, \forall \overrightarrow{u} \in \mathscr{W}, \exists! M \in \mathscr{E}, \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$

Cette axiomatique définit $\mathscr{E}$ comme espace affine de direction $\mathscr{W}$.

Theorème

Soit E un $\mathbb{R}$-EV .

Soit $\varphi \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (a, b) & \mapsto & \overrightarrow{ab} = b - a \end{array} \right.$.

L'introduction de l'application φ munit le $\mathbb{R}$-EV E d'une structure affine canonique.

2 Translation

Définition

Soit $\overrightarrow{u} \in E$.

La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application $T_{\overrightarrow{u}} \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & M' = M + \overrightarrow{u} \end{array} \right.$.

Theorème

L'ensemble $(\mathscr{T}, o)$ des translations est un groupe abélien.

3 Sous-espace affine

Définition

Soit E un espace affine.

On appelle SEA d'origine A de direction le SEV F de E l'ensemble $W = A + F = \{M \in E, M = A + \overrightarrow{u} / \overrightarrow{u} \in$

On appelle $dim\, W = dim\, F$.

$M \in W \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in F$.

Propriétés :

- $M, N \in W \Rightarrow \overrightarrow{MN} \in F$
- Non unicité de l'origine.
- Unicité de la direction.

Theorème
W est un SEV $\Leftrightarrow 0_E \in W$.

Définition
Si $dim\, W = dim\, W'$, alors $W//W'$ si $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W'}$.
Si $dim\, W < dim\, W'$, alors W est parallèle à W' si $\overrightarrow{W} \subset \overrightarrow{W'}$.

Theorème
$W//W' \Rightarrow W \bigcap W' = \emptyset$ ou $W \subset W'$.

Theorème
$W \bigcap W' = \emptyset$ ou $W \bigcap W'$ est un SEA de direction $\overrightarrow{W} \bigcap \overrightarrow{W'}$.

Définition
W et W' sont supplémentaires si $\overrightarrow{W} \oplus \overrightarrow{W'} = E$. Dans ce cas $W \bigcap W' = \{A\}$.

4 Etude analytique

Définition
On appelle repère cartésien de W : $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ avec O un point de W et $\mathscr{B}$ une base de $\overrightarrow{W}$.
Changement de repère
Soient :

- $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ l'ancien repère.
- $\mathscr{R}' = (O', \mathscr{B}')$ le nouveau repère.
- X la colonne coordonée de M dans $\mathscr{R}$.
- X' la colonne coordonée de M dans $\mathscr{R}'$.
- X_O la colonne coordonée de O' dans $\mathscr{R}$.
- $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$

Alors : $X = X_O + P.X'$

Définition
$D = A + \overrightarrow{D} = A + Vect(\overrightarrow{u})$
$M = A + \lambda.\overrightarrow{u}$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda. \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Définition
$P = A + \overrightarrow{P} = A + Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
$M = A + \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v}$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda. \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \mu. \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

Theorème
Toute droite D a une équation cartésienne du type : $D : a.x + b.y = c$ avec $a.b \neq 0$.
Vecteur directeur de D : $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Techniques

- $D = (A, \overrightarrow{u})$

$$\begin{vmatrix} x & x_A & a \\ y & y_A & b \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- $D = (A, B)$

$$\begin{vmatrix} x & x_A & x_B \\ y & y_A & y_B \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- M_1, M_2, M_3 alignés :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Trois droites D_1, D_2, D_3 sont concourrantes ou parallèles.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

- Parallélisme :

$$D_1 // D_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

.

Theorème

Tout plan P de E a une équation cartésienne du type : $a.x + b.y + c.z = d$ avec $a.b.c \neq 0$.

Techniques

- $P = (A, B, C)$ avec $A \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$; $C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

- $P = A + \overrightarrow{P}$

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{P} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\text{liée} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & a & a' \\ y - y_0 & b & b' \\ z - z_0 & c & c' \end{vmatrix} = 0$$

- $P = (A, B, C)$

$$\begin{vmatrix} x_M - x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_M - y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \\ z_M - z_A & z_B - z_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

- $P // P' \Leftrightarrow rang \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$

Définition

Droite dans l'espace : intersection de deux plan : D $\begin{cases} a.x+b.y+c.z=d \\ a'.x+b'.y+c'.z=d' \end{cases}$ avec $rangD=2$.

5 Barycentre

Définition

Soit $S=\{(A_i,\alpha_i)\}_{1\leq i\leq n}$ un ensemble de points pondérés.
Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ alors il existe un point G unique de E vérifiant les conditions équivalentes suivantes :

- $\sum_{i=1}^n \alpha_i.\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$
- Pour tout point O fixé de E : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\alpha_i.\overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$.
- Pour tout point M de E : $\sum_{i=1}^n \alpha_i.\overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right).\overrightarrow{MG}$.

On dit alors que G est le barycentre du système S.

Propriétés :

- L'ordre est indifférent.
- Le barycentre de $\{(A_i,\alpha_i)\}$ = barycentre de $\{(A_i,k.\alpha_i)\}$ pour $k\neq 0$.
- Associativité.
- Soit W un SEA de E. $\forall i\in\mathbb{N}, A_i\in W \Rightarrow G\in W$.
- $[A;B]=\{\text{barycentre de }\ \{(A,a),(B,b)\}\,\text{avec}a,b\in\mathbb{R}_+\}$.

6 Géométrie affine euclidienne

Définition

$$d(M,N)=MN=\left\|\overrightarrow{NM}\right\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}$$

Soient $D: a.x+b.y+c=0$ et $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$.

$$d(M_0,D)=\frac{|D(M_0)|}{\overrightarrow{n}}=\frac{|a.x_0+b.y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Soient $P: a.x+b.y+c.z+d=0$ et $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$.

$$d(M_0,P)=\frac{|P(M_0)|}{\|\overrightarrow{n}\|}=\frac{|a.x_0+b.y_0+c.z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Soit $D=(A,\overrightarrow{u})$ une droite de l'espace et $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$.

$$d(M_0,D)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

Définition
Soient W_1 et W_2 deux SEA de E.
On dit que :
- W_1 et W_2 sont orthogonales si $\overrightarrow{W_1} \perp \overrightarrow{W_2}$.
- W_1 et W_2 sont supplémentaires orthogonales si $\overrightarrow{W_1}^{\perp} = \overrightarrow{W_2}$.
- W_1 et W_2 sont perpendiculaires si $\overrightarrow{W_1}^{\perp} \perp \overrightarrow{W_2}^{\perp}$.

Définition

$$\tan(D, D') = \frac{\det(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n'})}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'}}$$

Définition

$$(D, D') = \theta \text{ avec } \theta = \arccos\left(\frac{\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'}\right|}{\|\overrightarrow{u}\|.\left\|\overrightarrow{u'}\right\|}\right)$$

$$(P, P') = \theta \text{ avec } \theta = \arccos\left(\frac{\left|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|.\left\|\overrightarrow{n'}\right\|}\right)$$

$$(D, P) = \theta \text{ avec } \theta = \arccos\left(\frac{|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{n}\|}\right)$$

7 Lignes de niveau

8 Similitudes du plan

Définition
f est une similitude de rapport k si $\left\{\begin{array}{c} f \text{ affine} \\ \forall N, M \in E, M'N' = k.NM \end{array}\right.$.

Theorème
f est une similitude de rapport $k \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} f \text{ affine} \\ \overrightarrow{f} = k.\Psi, \text{ avec } \Phi \in \mathscr{O}(E) \end{array}\right.$.

Theorème
L'ensemble des similitudes $(S(E), o)$ est un groupe.
L'ensemble $S^+(E) = \left\{f \in S(E), \overrightarrow{f} = k.\Psi, \text{ avec } \Phi \in SO(E)\right\}$ est un sous-groupe de $S(E)$.

Edtude analytique
Une similitude directe est entièrement définie par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + k.\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Utilisation des conplexes
Une similitude directe est entièrement définie par :

$$z' = a.z + b$$

$$k = |a| \text{ et } \theta = \arg(a)[2\pi]$$

Theorème

Les similitudes du plan conservent les angles orientés.

Theorème

Etant donnés deux segment $[AB]$ et $[A'B']$ non triviaux, il existe une similitude unique f telle que $\left\{\begin{array}{l} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{array}\right.$.

Si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, $f = T_{\overrightarrow{u}}$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA'}$.

Si $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$:

- $k = \dfrac{A'B'}{AB}$.
- $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})[2\pi]$.
- $\dfrac{\Omega A'}{\Omega A} = k$: Ω est l'intersection d'un cercle et d'un arc de cercle.

Applications linéaires

1 Généralités

Définition
f est linéaire si :
- $\forall x, y \in E, f(x+y) = f(x) + f(y)$.
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$.

Theorème
f est linéaire si et seulement si : $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(x + \lambda.y) = f(x) + \lambda.f(y)$.

Propriétés :
- $f(O_E) = O_F$.
- $f\left(\sum \lambda_i.x_i\right) = \sum \lambda_i.f(x_i)$.
- A est un SEV de $E \Rightarrow f(A)$ est un SEV de F.
- Si B est un SEV de F, alors $f^{-1}(B)$ est un SEV de E.

Définition
f est un isomorphisme si $\left\{\begin{array}{l} f \in \mathscr{L}(E,F) \\ f \text{ bijective} \end{array}\right.$.

Theorème
Si f est un isomorphisme de E vers F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F vers E. On dira que E et F sont isomorphes.

Theorème
$(\mathscr{L}(E,F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-EV .

Theorème
Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

$$gof \in \mathscr{L}(E,G)$$

Définition
f est un endomorphisme si $\left\{\begin{array}{l} f \in \mathscr{L}(E,F) \\ f : E \to E \end{array}\right.$. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Theorème
$(\mathscr{L}(E), +, o, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Définition
f est un automorphisme si $\left\{\begin{array}{l} f \in \mathscr{L}(E) \\ f \text{ bijectif} \end{array}\right.$.
On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Theorème

$(GL(E), o)$ est un groupe linéaire. C'est le groupe linéaire de E.

2 Image-noyau

Définitions

$$Im(f) = f(E) = \{f(x), x \in E\}$$
$$\ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x, f(x) = 0_F\}$$

Propriétés :

- $Im(f)$ et $\ker(f)$ sont des SEV .
- f surjective $\Leftrightarrow Im(f) = F$.
- f injective $\Leftrightarrow \ker(f) = 0_E$.

Résolution de l'équation linéaire $f(x) = b$

- $b \notin Im(f)$, alors l'équation n'a pas de solution.
- $b \in Im(f)$, alors $\exists x_0 \in E, f(x_0) = b$
  Dans ce cas $f(x) = b \Leftrightarrow x = x_0 + u$ avec $u \in \ker(f)$.

3 Familles de vecteurs

Theorème

- A liée $\Rightarrow f(A)$ liée.
- $\left\{ \begin{array}{c} A \text{ libre} \\ f \text{ injective} \end{array} \right. \Rightarrow f(A)$ libre.
- A est génératrice de $E \Rightarrow f(A)$ est génératrice de $f(E)$.
  Si f surjective $f(A)$ engendre F.
- $\left\{ \begin{array}{c} A \text{ est une base} \\ f \text{ injective} \end{array} \right. \Rightarrow f(A)$ est une base.

4 Projecteurs

Définition

Soit $E = E_1 \oplus E_2$.

$$p \left| \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x_1 \end{array} \right. \quad ; \quad q \left| \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x_2 \end{array} \right.$$

p est la projection de E sur E_1 parallèlement à E_2.
q est la projection de E sur E_2 parallèlement à E_1.
p et q sont des projections associées.

Propriétés :

- $p \in \mathscr{L}(E)$.
- $pop = p$.
- $Inv(p) = E_1$.
- $Im(p) = E_1$ et $\ker(p) = E_2$.

Définition
$f : E \to E$ est un projecteur sur $\left\{ \begin{array}{l} f \in \mathscr{L}(E) \\ fof = f \end{array} \right.$.

Theorème
Toute projection est un projecteur.

Theorème
Si p est un projecteur alors :

- $Im(p)$ et $\ker(p)$ sont deux SEV supplémentaires de E.
- p est alors la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.
- $q = id_E - p$ est le projecteur associé à p.

Theorème
Soient $F_1, \dots, F_n$ des SEV de E tels que $E = \bigoplus F_i$ $(*)$.
$E = F_i \oplus G_i$ avec $G_i = F_1 \oplus \dots \oplus F_{i-1} \oplus F_{i+1} \oplus \dots \oplus F_n$.
Soit p_i la projection vectorielle sur F_i parallèlement à G_i.
La famille $(p_i, 0 \leq i \leq n)$ est dite associée à la décomposition $(*)$.
Les p_i sont des projecteurs tels que :

- $\sum p_i = id_E$
- $\forall i, j, i \neq j \leq p_i o p_j = \tilde{0}$.

5 Symétries

Définition
Soit $E = E_1 \oplus E_2$.

$$S_1 \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array} \right. \quad ; \quad S_2 \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_2 - x_1 \end{array} \right.$$

S_1 est la symétrie de E sur E_1 parallèlement à E_2.
S_2 est la symétrie de E sur E_2 parallèlement à E_1.
p et q sont des symétries associées : $S_2 = -S_1$.

Propriétés :

- $S \in \mathscr{L}(E)$.
- $SoS = S$.
- $Inv(S) = E_1$ et $Opp(S) = E_2$.
- $\ker(S) = 0_E$ et $Im(S) = E$.

Theorème
Toute symétrie est un endomorphisme involutif.

Theorème
Soit f un endomorphisme involutif.
$Inv(f)$ et $Opp(f)$ sont deux SEV suplémentaires de E. f est la symétrie par rapport à $Inv(f)$ parallèlement à $Opp(f)$.
Relation symétrie projecteur

$$S = 2.p - id_E$$

6 Dualité

Définition
Une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
On note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

Theorème
Soit $\varphi \in \mathscr{E}^*$, alors $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E.
Soit H un hyperplan de E. Il existe au moins une forme linéaire $\varphi \in E^*$ telle que $H = \ker(\varphi)$.
Soient φ_1 et φ_2 deux formes linéaires non nulls.
Pour que $\ker(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$,il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi_2 = \lambda.\varphi_1$.

Theorème
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soient $e_i^* : x \mapsto x_i$.
$\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*.

Theorème
Si $dim(E) = n$, alors $dim(E^*) = dim(E)$.

Définition
Soient $x \in \mathscr{E}$ et $\varphi \in E^*$.
On dit que x et φ sont orthogonaux lorsque $< x, \varphi >= \varphi(x) = 0$.

Theorème
Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E, alors $F \left| \begin{array}{ccc} E^* & \to & \mathbb{K}^p \\ \varphi & \mapsto & (\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_p)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme de E^* sur $\mathbb{K}^n$.

Theorème
Soient $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E et soit $F \left| \begin{array}{ccc} E^* & \to & \mathbb{K}^p \\ \varphi & \mapsto & (\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_p)) \end{array} \right.$.
Pour que F soit surjective, il faut et il suffit que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ soit libre.
Pour que F soit injective, il faut et il suffit que $(u_1, \ldots, u_p)$ soit génératrice.

Theorème
Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une famille de formes linéaires sur E.
Soit $G \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^p \\ u & \mapsto & (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_p(u)) \end{array} \right.$.
$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de E^* si et seulement si G est un isomorphisme de E sur $\mathbb{K}^n$.

Theorème
Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une famille de formes linéaires sur E.
Soit $G \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^p \\ u & \mapsto & (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_p(u)) \end{array} \right.$.
Pour que G soit surjective, il faut et il suffit que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ soit une famille libre. Pour que G soit injective, il faut et il suffit que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ soit une famille génératrice.

Theorème

Soit $\mathscr{C} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*.
Alors : il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathscr{C}$ soit la base duale de $\mathscr{B}$.

7 Polynômes d'interpolation de Lagrange

Définition

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, L_i(x) = \frac{\prod_{i \neq k}(x - x_k)}{\prod_{i \neq k}(x_i - x_k)}$$

Theorème
$(L_1, \dots, L_p)$ forme une base de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$.
De plus si on note $\varphi_i : P \mapsto P(x_i)$, $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une base de E^*.

Theorème de Lagrange
Etant données $x_1, \dots, x_p$ deux à deux distincs dans $\mathbb{K}$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique polynôme P de degré $\leq p - 1$ tel que $\forall i \in [0; n-1], P(x_i) = y_i$.
P est le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Applications linéaires en dimension finie

1 Détermination d'une application linéaire

Theorème
Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $\mathscr{C} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ une famille quelconque de F.

- Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f(\mathscr{B}) = \mathscr{C}$.
- f est déterminée par $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i.\epsilon_i$.
- f est bijective si et seulement si $\mathscr{C}$ est une base de F.

2 Isomorphismes

Theorème

$$E \approx F \Leftrightarrow dim(E) = dim(F)$$

Theorème
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Tout supplémentaire de $\ker(f)$ dans E est isomorphe à $Im(f)$.

Définition
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$rg(f) = dim(Im(f)) = dim(f(E))$$

Propriétés :

- Si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $rg(f) = rg(f(\mathscr{B}) =$.
- $rg(f) \leq dim(E)$ et $rg(f) \leq dim(F)$.
- On ne modifie pas le rang d'un application linéaire en la composant à droite ou à gauche par un isomorphisme.

Theorème du rang
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$dim(E) = dim(\ker(f)) + rg(f)$$

Theorème
En dimension finie :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow dim(\ker(f)) = 0 \Leftrightarrow rg(f) = n \Leftrightarrow ff \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

Theorème

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ (anneau des endomorphismes).

$$f \text{ inversible à gauche} \Leftrightarrow f \text{ inversible à droite}$$

3 Dual

Applications affines

1 Généralités

Définition
Soient E et F deux espaces affines.
On dit que $f : E \to F$ est affine s'il existe un point $A \in E$ tel que $\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \overrightarrow{x} & \mapsto & f(A+\overrightarrow{x}) - f(A) \end{array} \right.$ est linéaire.
Dans ce cas on a donc : $\forall \overrightarrow{x} \in E, f(A+\overrightarrow{x}) = f(A) + \varphi(x)$.

Propriétés :

- φ est indépendante de A.
- Soient f et g deux applications affines de E dans F, alors
$$f = g \Rightarrow \overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$$
- $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g} \Rightarrow \exists T_{\overrightarrow{u}}, g = T_{\overrightarrow{u}} o f$.
- Une application affine est parfaitement déterminée par un couple (A, A') de poins homologues et une application linéaire.
- $\forall M, N \in E, \overrightarrow{N'M'} = \varphi(\overrightarrow{NM})$ où $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$ avec $\varphi = L(f)$.
- f linaire $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f \text{ affine} \\ f(0_E) = 0_F \end{array} \right.$.

Theorème
$f : E \to E$ est une translation $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ affine} \\ \overrightarrow{f} = id_E \end{array} \right.$.

Définition
Comme φ est indépendante de A, on dit que φ est l'application linéaire associée à f : $\varphi = L(f) = \overrightarrow{f}$.

2 Applications affines et sous-espaces affines

Theorème
Soit $f : E \to F$ une application affine.
Soit W un SEA de E tel que $W = A + \overrightarrow{W}$.
Alors : $f(W) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{W})$.

Définition
Ensemble des points invariants de f : $Inv(f) = \{M, f(M) = M\}$.

Theorème
Soit $f : E \to E$ une application affine.
$Inv(f) = \emptyset$ ou $\inf(f)$ est un SEA de direction $\ker(\overrightarrow{f} - id_E)$.

Propriétés :

- l'alignement (ou la coplanarité).
- le parallélisme.
- le barycentre.

3 Composition : groupe affine

Theorème
f, g affine $\Rightarrow gof$ affine et $\overrightarrow{gof} = \overrightarrow{g} o \overrightarrow{f}$.

Theorème
Soit $f : E \to F$ affine.
f bijective $\Leftrightarrow \overrightarrow{f}$ bijective.
Dans ce cas : f^{-1} est affine et $L(f^{-1}) = \big(L(f)\big)^{-}1$.

Définition
On appelle transformation, toute bijection affine.

Définition
Soit $f : E \to E$ où E est un espace affine.
f est une homothétie de rapport $k(\in \mathbb{R} \backslash \{0; 1\})$ si

$$\begin{cases} f \text{ est affine} \\ \overrightarrow{f} = h_k \end{cases}$$

Theorème
Toute homothétie admet un point fixe unique appelé centre.

Theorème
Le groupe affine $(GA(E), o)$ ou groupe des transformations est un sous-groupe de l'ensemble des bijections de E.
$(\mathscr{H}T, o)$ l'ensemble des homothéties et des translations est un sous-groupe de $(GA(E), o)$.

4 Aspect analytique

Theorème
Une application affine est entièrement déterminée par un point $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et la matrice A de l'application linéaire associée.

$$f(X) = X_0 + A.X$$

5 Isométries

Définition
Soit E un espace affine euclidien de dimension 2 ou 3.
Soit $f : E \to E$. On dit que f est une isométrie si $\begin{cases} f \text{ est affine} \\ f \text{ conserve la norme} \end{cases}$.

Theorème
f est une isométrie si et seulement si $\begin{cases} f \text{ affine} \\ \overrightarrow{f} \in \mathscr{O}(E) \end{cases}$.

Propriétés :

- Les isométries sont des bijections (donc des transformations).

- L'ensemble des isométries affines de E : $(IS(E), o)$ est un sous-groupe de $GA(E)$.

Définition
$IS^{+}(E) = \left\{ f \in IS(E), \overrightarrow{f} \in SO(E) \right\}$ est l'ensemble des déplacements de E.
$IS^{-}(E) = \left\{ f \in IS(E), \overrightarrow{f} \in O^{-}(E) \right\}$ est l'ensemble des antidéplacements de E.

Theorème
$(IS^{+}(E), o)$ est un sous-groupe de (IS, o).

Définition

$$f = T_{\overrightarrow{u}} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ affine} \\ \overrightarrow{f} = id_E \end{cases}$$

Définition

$$R_{\Omega,\theta} \text{ est l'application affine} f : \begin{cases} f(\Omega) = \Omega \\ \overrightarrow{f} = R_{\theta} \end{cases}$$

Définition
Soit D une droite affine d'origine A dirigée par $\overrightarrow{k}$ et un réel θ.
$f = R_{D,\theta}$ l'application affine telle que $\begin{cases} f(A) = A \\ \overrightarrow{[f} \end{cases} = R_{\overrightarrow{D},\theta}$.

Définition
Dans le plan : $f = S_D \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ affine} \\ \overrightarrow{f} = S_{\overrightarrow{D}} \end{cases}$.
Dans l'espace : $f = S_P \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ affine} \\ \overrightarrow{f} = S_{\overrightarrow{P}} \end{cases}$.
Compostion des réflexions
Dans le plan : $f = S_{D'} o S_D$ est un déplacement.

- Premier cas : $D // D'$, alors $S_{D'} o S_D = T_{2.\overrightarrow{IJ}}$.
- Deuxièmes cas : D et D' sécantes en A, alors $S_{D'} o S_D = R_{A,2.\alpha}$.

Même chose dans l'espace en remplaçant les droites par des plans.

Theorème si $dim(E) = 2$
$IS^{+}(E)$ est constitué exactement des translations et des rotations.

Theorème si $dim(E) = 4$
$IS^{+}(E)$ est constitué exactement des translations, des rotations et des vissages.

6 Projections

Définition
Soit $f : E \to E$.
f est une projection si $\begin{cases} f \text{ affine} \\ fof = f \end{cases}$.

Theorème

Soit $f : E \to E$ affine.

f une projection $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{f} \text{ est un projecteur de l'EV } E \\ Inv(f) \neq \emptyset \end{array} \right.$.

Theorème

$$M' = f(M) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} M' \in W_1 \\ \overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{W_2} \end{array} \right.$$

7 Symétries

Définition

Soit $f : E \to E$

f est une symétrie si $\left\{ \begin{array}{c} f \text{ affine} \\ fof = id_E \end{array} \right.$.

Theorème

Soit $f : E \to E$ affine.

f est une symétrie $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{f} \text{ est une symétrie vectorielle} \\ Inv(f) \neq \emptyset \end{array} \right.$.

Theorème

$$M' = f(M) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} M * M' \in W_1 \\ \overrightarrow{MM'} \in W_2 \end{array} \right.$$

8 Affinités

Définition

Pour définir une affinité $f : E \to E$, on se donnera trois éléments :

- le rapport $k \in \mathbb{R}$,
- un axe W_1 SEA de E,
- une direction $\overrightarrow{W_2}$ avec $E\overrightarrow{W_1} \oplus \overrightarrow{W_2}$.

$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & M' = M_1 + k.\overrightarrow{M_1M} \end{array} \right.$$

avec M_1 le projeté de M sur W_1 parallèlement à $\overrightarrow{W_2}$.

Theorème

Toute affinité est une application affine.

Produit vectoriel

1 Produit mixte

Définition

Soient $u_1, \dots, u_n$, n vecteurs de E ($dim(E) = n$).
Le produit mixte de ces n vecteurs est le nombre réel :$[u_1, \dots, u_n] = \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$ où $\mathscr{B}$ est une BONDquelconque de E.

Propriétés :

- Il s'agit d'une forme n-linéaire alternée.
- Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une BON alors
  - si c'est une BOND: $[x_1, \dots, x_n] = +1$
  - sinon $[x_1, \dots, x_n] = -1$
- Cas où $dim(E) = 2$:
  Soient $u, v \in E$ non nuls.
  $(u, v) = \theta[\pi]$
  $\sin(\theta) = \dfrac{[u, v]}{\|u\| . \|v\|}$
- $|[u, v]| =$ Aire du parallélogramme engendré par (u, v).

2 Produit vectoriel

E est un espace orienté de dimension 3.

Définition

Fixons deux vecteurs u et v.
$f \left| \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ w & \mapsto & [u, v, w] \end{array} \right.$
f linéaire donc $f \in E^*$.
D'après l'isomorphisme canonique entre E et E^*, il existe un vecteur a unique tel que $\forall w \in E, f(w) = a.w$. Le vecteur a est nommé le produit vectoriel de u et v.

$$a = u \wedge v$$

Propriétés :

- $(u \wedge v).w = (v \wedge w).u = (w \wedge u).v$
- $u \wedge v = 0 \Leftrightarrow (u, v)$ liée.
- $(u \wedge v) \perp u$ et $(u \wedge v) \perp v$.
- $\varphi \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & E \\ (u, v) & \mapsto & u \wedge v \end{array} \right.$; φ est bilinéaire et antisymétrique.
- Si (u, v) est une famille orthonormale alors $(u, v, u \wedge v)$ est une BONDde E.
- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$
- $|[u, v, w]| =$Volume du parallélépipède engendré par (u, v, w).

Identité de Lagrange

$$\|u \wedge v\|^2 + (u \cdot v)^2 = \|u\|^2 . \|v\|^2$$
$$\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 . \|v\|^2 . \sin^2(\theta)$$

Double produit vectoriel

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot v).v - (u \cdot v).w$$

Formes quadratiques

Soit E un $\mathbb{R}$-EV .

1 Forme bilinéaire sur E

Définition
$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire si $\forall x \in E, y \mapsto \varphi(x,y)$ est une forme linéaire et si $\forall y \in E, x \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire.

Définition
Une forme bilinéaire φ sur E est dite symétrique si $\forall x,y \in E, \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

Définition
Une application $\Phi : E \to \mathbb{R}$ est appelée une forme quadratique sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur E telle que $\forall x \in E, \Phi(x) = \varphi(x,x)$.

Theorème
L'ensemble $\mathscr{B}(E)$ de toutes les formes bilinéaires symétriques définies sur E est un $\mathbb{R}$-EV .

Propriétés :

- $\Phi(0) = \varphi(0,0) = 0$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \Phi(\lambda.x) = \lambda^2.\Phi(x)$.
- $\forall x,y \in E, \Phi(x+y) = \Phi(x) + 2.\varphi(x,y) + \Phi(y)$.
- $\forall x,y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \Phi(\lambda.x + \mu.y) = \lambda^2.\Phi(x) + 2.\lambda.\mu.\varphi(x,y) + \mu^2.\Phi(y)$.
- $\Phi(\sum_{i=1}^n \lambda_i.x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.\Phi(x_i) + 2.\sum_{i<j} \lambda_i.\lambda_j.\varphi(x_i,x_j)$.

Theorème
Soit Φ une forme quadratique définie sur E. Alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique telle que $\forall x \in E, \Phi(x) = \varphi(x,x)$.
φ est appelée la forme polaire de Φ.

$$\forall x,y \in E, \varphi(x,y) = \frac{1}{2}.\left[\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)\right]$$
$$\forall x,y \in E, \varphi(x,y) = \frac{1}{4}.\left[\Phi(x+y) - \Phi(x-y)\right]$$

Theorème
$\varphi \mapsto \Phi$ est un isomorphisme de l'EV $\mathscr{B}(E)$ dans l'EV $Q(E)$.

Theorème Règle du parallélogramme
Soit Φ une frome quadratique sur E.

$$\forall x,y \in E, \Phi(x+y) + \Phi(x-y) = 2.\left[\Phi(x) + \Phi(y)\right]$$

2 Forme quadratique positive

Définition
Une forme quadratique Φ définie sur E est positive si $\forall x \in E, \Phi(x) \geq 0$.
Φ est définie positive si $\forall x \in E, x \neq 0 \Rightarrow \Phi(x) > 0$.

Theorème Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soit Φ une forme quadratique positive sur E, et soit φ sa forme polaire.
Alors : $\forall x, y \in E, \varphi(x,y)^2 \leq \Phi(x).\Phi(y)$.
Dans le cas où Φ est définioe positive : $\forall x, y \in E, \varphi^2(x,y) = \Phi(x).\Phi(y) \Leftrightarrow (x,y)$ liée.

3 Cas de la dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-EV de dimension n.
Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur E et Φ la forme quadratique associée.

Définition
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On appelle matrice de φ (ou de Φ) la matrice carée $A = (a_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.
A est réelle symétrique, ses éléments diagonaux sont $\Phi(e_i)$.
Expression analytique
Soient $e = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i.e_i$ deux vecteurs de E.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

. Soit A la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

$$\varphi(x,y) = {}^tX.A.Y$$

$$\Phi(x) = {}^tX.A.X = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}.x_i.x_j$$

Theorème
L'application $\varphi \mapsto A$ (ou $\Phi \mapsto A$) est un isomorphisme de l'EV $\mathscr{B}(E)$ (ou $\mathscr{Q}(E)$) sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'où $dim\,\mathscr{B}(E) = dim\,\mathscr{Q}(E) = dim\,\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Définition
Soient A et $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
A et B sont dites congruentes s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tP.A.P$.
Effet d'un changement de base
Soit $\mathscr{B}$ l'ancienne base, soit $\mathscr{B}'$ la nouvelle base, et soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Soient A la matrice de Φ sur $\mathscr{B}$, et A' la matrice de Φ sur $\mathscr{B}'$.
On a $A' = {}^tP.A.P$.

Theorème
Pour que A et B soient congruentes, il faut et il suffit qu'elles représentent la même forme quadratique dans deux bases d'un $\mathbb{R}$-EV de dimension n.
La relation 'A et B sont congruentes' est une relation d'équivalence sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Deux matrices congruentes sont équivalentes.
Deux matrices congruentes ont même rang.

Définition

On appelle rang de Φ le rang de la matrice associée dans une base $\mathscr{B}$.
Lorsque le $rg(\Phi) = n = dim\, E$, Φ (ou φ) est dite nnon dégénérée, la matrice A de Φ est alors inversible.

Définition
Soit Φ une forme quadratique sur E, φ sa forme polaire.
Une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite orthogonale pour Φ si $i \neq j \Rightarrow \varphi(e_i, e_j) = 0$.
Donc la matrice de Φ sur $\mathscr{B}$ est diagonale.
L'expression analytique de Φ sur $\mathscr{B}$ est de la forme :

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.x_i$$

Theorème
Si $\Phi \in \mathscr{Q}(E)$, il existe au moins une base orthogonale pour Φ.

Theorème
Toute matrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est congruente à une matrice diagonale donc toute matrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

4 Signature d'une forme quadratique

Theorème
Soit Φ une forme quadratique sur E (avec $dim\, E = n$) de rang r, et soit $\mathscr{B}$ une base orthogonale pour Φ.
Posons :

- $r = Card(\{i/\Phi(e_i) \neq 0\})$.
- $s = Card(\{i/\Phi(e_i) > 0\})$.
- $t = Card(\{i/\Phi(e_i) < 0\})$.

Les entiers r, s et t sont indépendants de la base orthogonale choisie.
On dit que (s, t) est la signature de Φ et $r = rg(\Phi)$.

Theorème
Toute matrice symétrique d'ordre r et de signature (s, t) est congruente à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5 Méthode de Gauss

Theorème
Soit E un EV de dimension $n \geq 1$.
Soit Φ une forme quadratique sur E et (s, t) un couple d'entiers tels que $r = s + t \leq n$.
Pour que (s, t) soit la signature de Φ, il faut et il suffit qu'il existe des formes linéaires $l_1, \dots, l_r$ linéairements indépendantes telles que :

$$\forall x \in E, \Phi(x) = \sum_{i=1}^{s} l_i(x)^2 - \sum_{i=s+1}^{r} l_i(x)^2$$

La méthode de Gauss

Soit $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i.x_i^2 + 2.\sum_{i<j} b_{ij}.x_i.x_j$.

On cherche à écrire $\Phi(x)$ sous la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.l_i(x)^2$ où les l_i sont des formes linéaires linéairement indépendantes et λ_i des scalaires non nuls.

Soit s le nombre de $\lambda_i > 0$ et t le nombre de $\lambda_i < 0$.

Premier cas: l'un au moins des termees a_i est $\neq 0$ Par exemple $a_i \neq 0$.

$\Phi(x) = a_1.\big(x_1^2 + \dfrac{2}{a_1}.(b_{12}.x_2 + \ldots + b_{1n}.x_n)\big) + \Phi_1'(x_2, \ldots, x_n)$

$\Phi(x) = a_1.\left[x_1 + \dfrac{1}{a_1}.(b_{12}.x_2 + \ldots + b_{1n}.x_n)\right]^2 - \left[\dfrac{1}{a_1}.(b_{12}.x_2 + \ldots + b_{1n}.x_n)\right]^2 + \Phi(x_2, \ldots, x_n)$.

$\Phi(x) = a_1.l_1^2(x_1, \ldots, x_n) + \Phi_1(x_2, \ldots, x_n)$.

Deuxième cas: les termes $a_1, \ldots, a_n$ sont tous nuls $\Phi(x) = 2.\sum_{i<j} b_{ij}.x_i.x_j$.

Supposons $b_{12} \neq 0$.

$\Phi(x) = 2.b_{12}\left(x_1.x_2 + x_1.\sum_{j=3}^{n} \dfrac{b_{1j}}{b_{12}}.x_j + x_2.\displaystyle\sum_{j=3}^{n} \dfrac{b_{2j}}{b_{12}}.x_j\right) + \Phi_1'(x_3, \ldots, x_n)$.

$\Phi(x) = 2.b_{12}.\left(x_1.x_2 + x_1.l_1(x_3, \ldots, x_n) + x_2.l_2(x_3, \ldots, x_n)\right) + \Phi_1'(x_3, \ldots, x_n)$.

$\Phi(x) = 2.b_{12}.\left[\big(x_1 + l_2(x_3, \ldots, x_n)\big)\big(x_2 + l_1(x_3, \ldots, x_n)\big)\right] + \Phi_1(x_3, \ldots, x_n)$.

$\Phi(x) = \dfrac{b_{12}}{2}.\left[\big(x_1 + x_2 + l_2 + l_1\big)^2 - \big(x_1 - x_2 + l_2 - l_1\big)^2\right] + \Phi_1(x_3, \ldots, x_n)$.

Matrices

1 Structures de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M_n(\mathbb{K})$

Theorème
$M_{n,p}$ est une EV de dimension $n \times p$.
Les E_{ij} constituens une base de E.
$E_{ij} \times E_{kl} = \delta_{jk}.E_{il}$

Theorème
$(M_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-Algèbre.

2 Déterminant

Theorème
Il existe une et une seule application $\varphi : M_n(\mathbb{K}) \in \mathbb{K}$ possédant les propriétés suivantes :

- φ est n-linéaire.
- φ est alternée.
- $\varphi(I_n) = 1$

φ est appelée la fonction déterminant.

3 Trace

Définition
Soit $A = (a_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$.

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Propriétés :

- La trace est un opérateur linéaire.
- $Tr({}^tA) = Tr(A)$.
- $Tr(A.B) = Tr(B.A)$
- A et B semblables $\Rightarrow Tr(A) = Tr(B)$.
- $P_A(X) = (-1)^n.X^n + (-1)^n.Tr(A).X^{n-1} + \ldots + \det(A)$.
- Si $\lambda_1, ldots, lambda_n$ sont les n racines de P_A dans $\mathbb{C}$, alors :
  - $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = Tr(A)$.
  - $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A)$.

4 Utilisation des matrices en algèbre linéaire

Theorème

Les bases $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ étant fixées, l'application qui à une application linéaire de E dans F associe sa matrice dans le couple de bases $(\mathscr{U}, \mathscr{V})$ est un isomorphsme de l'EV $\mathscr{L}(E, F)$ sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$, d'pù $\dim \mathscr{L}(E, F) = n.p$.

Theorème

$\mathscr{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $E \Leftrightarrow M_{\mathscr{B},\mathscr{U}}$ est inversible.

Changement de base

Soient :

- E un EV avec $\dim E = p$ et $\mathscr{U} = (u_1, \ldots, u_p)$ une base de E.
- F un EV avec $\dim F = n$ et $\mathscr{V} =' (v'_1, \ldots, v'_p)$ une base de F.
- $P = P_{\mathscr{U},\mathscr{V}}$
- X la mtrice de x dans la base $\mathscr{U}$
- X' la matrice de x dans la base $\mathscr{V}$

On a : $X = P.X'$

Soient :

- $\mathscr{U}'$ une nouvelle base de E.
- $\mathscr{V}'$ une nouvelle base de F.
- A la matrice de f dans $(\mathscr{U}, \mathscr{V})$.
- A' la matrice de f dans $(\mathscr{U}', \mathscr{V}')$
- $P = P_{\mathscr{U},\mathscr{U}'}$ et $Q = P_{\mathscr{V},\mathscr{V}'}$

On a : $A' = Q^{-1}.A.P$ et $A = Q.A'.P^{-1}$.

$$A = Q.A'.P^{-1}$$

Définition

Deux matrices A et B sont équivalentes s'il existe deux matrices inversibles $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q.A.P$.

Theorème

A et B sont équivalentes $\Leftrightarrow$ A et B représentent la même application linéaire.

La relation A et B sont équivalentes est une relation d'équivalence dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

5 Matrices carrées

$\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une algèbre.

Theorème

$A = M_{\mathscr{B}}(f)$ inversible $\Leftrightarrow f$ bijective.

Theorème

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible $\Leftrightarrow \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) / A.B = I_n$

Propriétés :

- $\forall A, B \in GL_n(\mathbb{K}), (AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
- $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}), {}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Définition
Deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}.A.P$.

Propriétés :

- La relation A et B sont semblables est une relation d'équivalence.
- Deux matrices semblables sont équivalentes.

6 Rang

Définition
Soit $\varphi = (u_1, \dots, u_n)$.
On appelle $rg(\varphi)$ la dimension du SEV $F = Vect(u_1, \dots, u_n)$.

Theorème
Soient $f : E \to F$ une application linéaire injective et $\varphi = (u_1, \dots, u_n)$ un système de vecteurs de E.
$rg(f(u_1), \dots, f(u_n)) = rg(u_1, \dots, u_n)$

Définition
Soient E et F deux EV de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On pose $rg(f) = \dim(Im(f))$.

Theorème
Si $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E, alors $rg(f) = rg(f(u_1), \dots, f(u_n))$.

Définition
Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.
Notons C_i les colonnes de A.
On appelle $rg(A)$ le rang de $(C_1, \dots, C_n)$ dans l'EV $\mathbb{K}^n$.

Theorème
Soient :

- E et F deux $\mathbb{K}$-EV .
- $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$.
- $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $A = M_{\mathscr{U},\mathscr{V}}(f)$.

Alors : $rg(f) = rg(f(u_1, \dots, u_n) = rg(A)$.

Theorème
Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $rg({}^tA) = rg(A)$.

7 Matrices extraites

Définition
On appelle matrice "extraite" de A toute matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes de A.

Theorème

Si B est extraite de A, alors $rg(B) \leq rg(A)$.

Theorème

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, le rang de A est égal au maximum des rangs des matrices carées inversibles extraite de A.

Définition

Un bloc extrait de $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice extraite de A formée de lignes et de colonnes consécutives.

Matrices par blocs

Soient $A \in M_n(\mathbb{K}), C \in M_p(\mathbb{K})$.

$$M = \left\{ \begin{array}{cc} A & B \\ 0 & C \end{array} \right\}$$

$$\det(M) = \det(A).\det(C)$$

8 Opérations élémentaires

Traduction en terme de produit de matrices

- à I_n on applique $L_i \leftrightarrow L_j$: P_{ij}.
- à I_n on applique $L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$: $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda.E_{ij}$.
- à I_n on applique $L_i \leftarrow \lambda.L_i$: $A_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1).E_{ii}$.
- $\det(P_{ij}) = -1$
- $\det(T_{ij}(\lambda)) = 1$
- $\det(A_i(\lambda)) = \lambda$

Theorème

Soit $M = (a_{ij} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

On obtient les transformations usuelles sur les lignes de M en multipliant à gauche par les matrices correspondantes.

On obtient les transformations usuelles sur les colonnes de M en multipliant à droite par les matrices correspondantes.

Theorème

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle.

Par une suite d'opérations sur les lignes et les colonnes de M on peut transformer M en une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Theorème

Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A, on peut transformer A en une matrice équivalente de la forme J_r.

Theorème

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elle ont le même rang.

Theorème
Soit $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{K})$, par une suite d'opérations portant seulement sur les lignes de A, on peut transformé A en la matrice I_n.

9 Equations linéaires

Formules de Cramer
Soit $\mathscr{S} \Leftrightarrow A.X = B$ avec $A = (C_1, \ldots, C_n)$.
Posons $\Delta_i = \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \ldots, C_n)$.

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Theorème
Les opérations élémentaires transforment le système $(\mathscr{S})$ en un système équivalent.

Theorème
Par une suite d'opérations élémentaires sur $(\mathscr{S})$ et quitte à changer la numérotation des variables, on peut transformer $(\mathscr{S})$ en un système équivalent de la forme :

$$\begin{aligned} a_{11}.x_1 + \ldots + a_{1r}.x_r + \ldots + a_{1p}.x_p = &\ b_1 \\ \ldots = &\ \ldots \\ a_{rr}.x_r + \ldots + a_{rp}.x_p = &\ b_r \\ 0 = &\ b_{r+1} \\ \ldots = &\ \ldots \\ 0 = &\ b_n \end{aligned}$$

10 Trigonalisation

Définition
f est "trigonalisable" s'il existe une base E dans laquelle la matrice A de f est triangulaire.

Theorème
Pour que f soit trigonalisable, il faut et il suffit qu'il existe un drapeau $(F_1, \ldots F_n)$ de sous-espaces stables par f.

Theorème
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, pour que f soit trigonalisable, il faut et il suffit que le polynôme caractéristique de f soit scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Theorème
$P_A(X) = P_{{}^tA}$.

Theorème
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
A est dite trigonalisable s'il existe une matrice triangulaire T et une matrice inversible P telle que $T = P^{-1}.A.P$.

Theorème
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ (ou $A \in M_n(\mathbb{K})$), les propriétés suivantes sont équivalentes :

- u est trigonalisable

- $P_u(X)$ (ou P_A) est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.
- Il existe un polynôme P, scindé dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = \tilde{0}$

Applications multilinéaires

1 Formes trilinéaires

Règle de Sarrus

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$
$$\det M = x_1.y_2.z_3 + x_3.y_1.z_2 + x_2.y_3.z_1 - x_3.y_2.z_1 - x_2.y_1.z_3 - y_3.z_2.x_1$$

Theorème

Les formes trilinéaires et alternées sont exactement les applications $f = K.\det_{\mathscr{B}}$.

Propriétés :

- $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$ d'où $k = f(\mathscr{B})$.
- (u, v, w) base de $E \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(u, v, w) \neq 0$

2 Formes n-linéaires

Définition

Soit $\varphi_j \left| \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ u_j & \mapsto & f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_n) \end{array} \right.$.

f est n-linéaire si $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ φ_j est linéaire.

Définition

Soit f une application n-linéaire.

- f est alternée si
$$\left\{ \begin{array}{c} i \neq j \\ u_i = u_j \end{array} \right. \Rightarrow f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = 0$$
- f est antisymétrique si pour toute transposition de $\mathscr{S}_n$:
$$f(u_{\tau(1)}, \dots, u_{\tau(n)}) = -f(u_1, \dots, u_n)$$
- f est symétrique si pour toute transposition de S_n :
$$f(u_{\tau(1)}, \dots, u_{\tau(n)}) = f(u_1, \dots, u_n)$$

Theorème
Soit f une application n-linéaire.
f est altérnée $\Leftrightarrow$ f est antisymétrique.
Pour toute permutation $\sigma \in \mathscr{S}_n$:

$$f(f(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma).f(u_1, \ldots, u_n)$$

3 Etude générale du déterminant

Définition
$\det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \epsilon(\sigma).\Pi_{i=1}^{n} x_{\sigma(1),1}$

Theorème
Les formes n-linéaires et alternées sont exactement les applications $f = k.\det_{\mathscr{B}}$

4 Déterminants et bases

Theorème
Soit $A = (u_1, \ldots, u_n)$ famille de n vecteurs de E.
A est une base de $E \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(A) \neq 0$

Définition
Orientation d'un $\mathbb{R}$-EV .
Soient $\mathscr{B}$ une base de référence et $\mathscr{B}'$ une autre base de E.

- si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$ on dira que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ont même sens.
- si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') < 0$ on dira que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont de sens contraires.

5 Déterminant d'un endomorphisme

Définition
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. $\det f = \det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))$ où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E.

Propriétés :

- $\det_{\mathscr{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \det(f) \times \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n)$
- $\forall f, g \in \mathscr{L}(E), \det(gof) = \det(f).\det(g)$
- $f \in GL(E) \Leftrightarrow \det f \neq 0$ dans ce cas $\det f^{-1} = \dfrac{1}{\det f}$

6 Déterminant d'une matrice

Définition
$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \exists f \in \mathscr{L}(E), M = M_{\mathscr{B}}(f)$
$\det(A) = \det(B)$

Propriétés :

- $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$
- $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ dans ce cas $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
- B semblable à $A \Rightarrow \det(B) = \det(A)$
- $\det({}^tA) = \det(A)$

Transformations

Transformation	Action sur le déterminant
$C_i \leftrightarrow C_j$ $C_j \leftarrow \mu.C_j$ $C_j \leftarrow C_j + \lambda.C_i$	changement de signe multiplication par μ pas de changement
$C_j \leftarrow \sum_{i \neq j} \lambda_i.C_i$	pas de changement
$C_1 \leftarrow C_1$ $C_2 \leftarrow C_2 + \alpha.C_1$ $\dots$ $C_n \leftarrow C_n + \lambda_1.C_1 + \dots + \lambda_{n-1}.C_{n-1}$	

7 Comatrice

Définition
Le mineur de a_{ij} est le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu à partir de $\det(A)$ en supprimant la colonne j et la ligne i.

Définition
Le cofacteur de a_{ij} est $(-1)^{i+j}.\Delta_{ij}$ où Δ_{ij} est le mineur.

Définition
La comatrice de A est la matrice des cofacteurs.

Theorème
$A \times {}^tcom(A) = {}^tcom(A) \times A = \det(A) \times I_n$

Réduction des endomorphismes

1 Sous-espace stable par un endomorphisme

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-EV et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Un SEV F de E est dit stable par u si $u(F) \in F$.
L'application $u_F : F \to F$ définie par $\forall x \in F, u_F(x) = ux)$ est un endomorphisme de F, on le nomme endomorphisme induit par u sur F.

Theorème

Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ qui commute avec u. Alors : $Im(v)$ et $\ker(v)$ sont stables par v.

Theorème

Soient $x_0 \in E \setminus \{0\}$ et $D = Vect(x_0)$.
Pour que xD soit stable par u, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x_0))\lambda.x_0$.

Theorème

Soient H un hyperplan de E et l la forme linéaire associée ($H = \ker(l)$).
H est stable par $u \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, lou = \lambda.l$.

Theorème

L'hyperplan d'équation $a_1.x_1 + \dots a_n.x_n = 0$ est stable par u si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tM_u$.

Theorème

Soit $E = \bigoplus F_i$.
Pour que les SEV $F_1, \dots, F_p$ soient stables par u, il faut et il suffit que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ soit diagonale par blocs.

Définition

Soit E un EV de dimension n.
Un drapeau dans E est une suite croissante de SEV : $F_1 \subset \dots \subset F_n = E$ avec $dim(F_i) = i$.

Theorème

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
$V \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathscr{L}(E) \\ P & \mapsto & P(u) \end{array} \right.$ est un morphisme d'algèbre.
$Im(V) = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathscr{L}(E)$.

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$.
$V \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{K}[X] & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ P & \mapsto & P(M) \end{array} \right.$ est un morphisme d'algèbre.
$Im(V) = \{P(M), P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{K})$.

2 Vecteurs propres, valeurs propres

Définition
Soient E un $\mathbb{K}$-EV de dimension quelqconque et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Un vecteur $x_0 \neq 0$ est appelé vecteur propre de u s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x_0) = \lambda.x_0$.
L'ensemble des valeurs propres de $u$est le spectre de u:$^{(}u)$.
Si $\lambda \in^{(} u)$, l'ensemble $E_\lambda = \{x \in E / u(x) = \lambda.x\}$ est un SEV de E.

Propriétés :

- $0_E \in^{(} u) \Rightarrow \ker(u) \neq \{0_E\} \Rightarrow u$ non injectif.
- Soit $\lambda \in^{(} u)$, alors, E_λ est stable par u.
- Soit $\lambda \in^{(} u)$, avec $\lambda \neq 0$, alors $E_\lambda \subset Im(u)$.
- Si $\lambda \in^{(} u), forallk \in \mathbb{N}, \lambda^k \in^{(} u^k)$.
- Si $P \in \mathbb{K}[X], P(\lambda) \in^{(} u)$.

Theorème
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de u, alors pour toute valeur propre λ de u, on a $P(\lambda) = 0$.

Theorème
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soient λ_i les valeurs prorpres distinctes de u et pour chaque i, soit x_i un vecteur propre associé à λ_i.
Alors : $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système libre de E.

Theorème
Soient $E_1, \ldots, E_n$ les sous-espaces propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Alors : la somme $E_1 + \ldots + E_n$ est directe.

3 Cas de la dimension finie

Définition
Les éléments propres de A sont par définition les éléments propres de l'endomorphisme associé.

Définition
On appelle polynôme caractéristique d'une matrice A, le polynôme $P_A(X) = \det(A - X.I_n)$.

Propriétés :

- P_A est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

- Le coefficient de X^{n-1} est $(-1)^n.Tr(A)$.
- Le coefficient constant est $\det(A)$.

Theorème
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ semblables, alors A et B ont même polynôme caractéristique.

Définition
On appelle polynôme caractéristique d'un endomorphisme f le polynôme caractéristique de sa matrice A dans une base $\mathscr{B}$. Cette définition ne dépend pas du choix de la base.

Theorème fondamentale

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et P_f sont polynôme caractéristique.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \in^(f) \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$$

Définition
Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, P_f sont polynôme caractéristique et λ une valeur propre de f.
L'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est l'ordre de multiplicité de la racine λ de P_f.

Theorème
Soient E un $\mathbb{K}$-EV de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Soient F un SEV stable par f et f_F l'endomorphisme induit âr f sur F.

$$P_{f_F} \text{ est un diviseur de } P_f$$

Theorème
Soit λ une valeur propre de f d'ordre α.
Alors $1 \leq dim(E_\lambda) \leq \alpha$.

Theorème de décompostition des noyaux
Soient P et Q deux polynômes premiers entre eux et soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Alors : $\ker[(PQ)(u)] = \ker[P(u)] \oplus \ker[Q(u)]$.

Theorème : Généralisation
Soient $P_1, \ldots, P_n$ des polynômes premiers entre eux, Alors : $\ker[(P_1P_2 \ldots P_n)(u)] = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker(P_i(u))$.

Theorème
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des valeurs propres distinctes de u.
Alors : les polynômes $(X - \lambda_1), \ldots, (X - \lambda_n)$ sont premiers entre eux, donc la somme des SEV $\ker(u - \lambda_i.id_E)$ est directe.

Theorème
Soit P un polynôme annulateur de u.
Supposons que $P = Q_1.Q_2. \ldots .Q_n$ où les Q_i sont premiers entre eux.
Alors : $\bigoplus_{i=1}^{n} \ker(Q_i(u)) = E$.

Theorème
Soit E un $\mathbb{K}$-EV de dimension n.
Si $u \in \mathscr{L}(E)$, alors il existe au moins un polynôme P non nul tel que $P(u) = 0$.

Theorème de Caley-Hamilton
Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et P_u son polynôme caractéristique.
Alors : $P_u(u) = \tilde{0}$.

Définition
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

$$I = \left\{ P \in \mathbb{K}[X], P(u) = \tilde{0} \right\}$$

Le polynôme minimal de u est l'unique polynôme unitaire P_0 tel que $I = \mathscr{P}_0.\mathbb{K}[X]$.

4 Diagonalisation

Définition
$u \in \mathscr{L}(E)$ est dit diagonalisable, s'il existe une base de E dans laquell la matrice de u est diagonale.

Theorème
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, u est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des SEV propres de u.

Theorème
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Pour que u soit diagonalisable, il faut et il suffit que le polynôme caractéristique de u soit scindé dans $\mathbb{K}[X]$.
Pour que u soit diagonalisable, il faut et il suffit que pour toute valeur propre λ, la dimension de E_λ soit égale à l'ordre de multiplicité de λ.

Theorème
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Pour que u soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il existe un polynôme scindé, à racines simples P tel que $P(u) = \tilde{0}$.

Theorème

$$P_A = P_{{}^tA}$$

5 Trigonalisation

Définition
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, A est dite trigonalisable s'il existe une matrice triangulaire T et une matrice inversible P telles que $T = P^{-1}.A.P$.

Theorème
Pour que A soit trigonalisable, il faut et il suffit que P_A soit scindé.

Theorème
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- u est trigonalisable.
- P_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.
- il existe un polynôme P, scindé dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = \tilde{0}$.

Theorème
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soient λ_i les valeurs propres distinctes de A et α_i leurs ordres de multiplicité.
Alors :

- $Tr(A) = \sum \alpha_i.\lambda_i$.
- $\det(A) = \prod \lambda_i^{\alpha_i}$.

Etude globale des fonctions

1 Généralités

Theorème
$(\mathscr{F}(I,\mathbb{R}),+,\times,\cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

Définitions
f est majorée s'il existe un réel A tel que $\forall x \in I, f(x) \leq A$.
f est minorée s'il existe un réel A tel que $\forall x \in I, f(x) \geq A$.
f est bornée si f est majorée et minorée.

Theorème
f est bornée si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in I, |f(x)| \leq K$.

Theorème
L'ensemble des fonctions bornées est un SEV de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.

Définitions

$$\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$$
$$\inf(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$
$$f^+ = \frac{|f|+f}{2} \qquad ; \qquad f^- = \frac{|f|-f}{2}$$

Définitions
- f présente un maximum global (ou absolu) en a si $\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$. On note $f(a) = \max_{x\in I} f(x)$.
- f présente un minimum global (ou absolu) en a si $\forall x \in I, f(x) \geq f(a)$. On note $f(a) = \min_{x\in I} f(x)$.

Si les inégalités sont strictes pour $x \neq a$, on parle d'extremum stricte.

Définitions
- f croissante si $\forall x, x' \in I, x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$.
- f décroissante si $\forall x, x' \in I, x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$.
- f strictement croissante si $\forall x, x' \in I, x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$.
- f strictement décroissante si $\forall x, x' \in I, x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$.

Theorème
Si f et g sont monotones, alors gof est monotone.

Définitions
Soient I un intervalle centré en O et $f : I \to \mathbb{K}$.
f est paire si $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$.
f est impaire si $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$.

Définition
f est périodique s'il existe un réel $T \neq 0$ tel que $\forall x \in \mathscr{D}_f, \left\{ \begin{array}{c} x + T \in \mathscr{D}_f \\ f(x+T) = f(x) \end{array} \right.$.
La période si elle existe est la plus petites période strictement positive.

Définition
f est lipschitzienne s'il existe un réel $k \geq 0$ tel que $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k.\,|x - y|$.
On dit alors que f est $k-$lipschitzienne.

Propriétés :
- L'ensemble des fonctions lipschitzienne est une SEV de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.
- Si f est lipschitzienne sur $[a; b]$ et sur $[b; c]$, alors elle l'est aussi sur $[a; c]$.
- Si f est lipschitzienne alors elle est continue en tout point de I.
- Si f est dérivable sur I et si sa dérivée est bornée sur I, alors f est lipschitzienne sur I.

2 Limite en un point

Définition
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

Si $a \in I$, on dit que f est continue en a.

Propriétés :
- Si elle existe la limite est unique.
- $f(x) \underset{a}{\to} l \Leftrightarrow f(x) - l \underset{a}{\to} 0$.
- $\left\{ \begin{array}{c} f(x) \underset{a}{\to} l \\ l > 0 \end{array} \right. \Rightarrow$ au voisinage de a, $f(x) > 0$.
- Théorème des gendarmes.
- $\left\{ \begin{array}{c} |f(x)| \leq g(x) \\ g(x) \underset{a}{\to} 0 \end{array} \right. \Rightarrow f(x) \underset{a}{\to} 0$.
- $\left\{ \begin{array}{c} f(x) \underset{a}{\to} 0 \\ g \text{ bornée au voisinage de } a \end{array} \right. \Rightarrow f(x).g(x) \underset{a}{\to} 0$.
- $\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}}, x_n \underset{a}{\to} \alpha \Rightarrow f(x_n) \underset{a}{\to} l$.

Theorème
Si a est un point intérieur à I,
f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite à droite en a, f admet une limite à gauche en a et $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = f(a)$.

Theorème de composition

$$\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta \\ \lim_{X\to\beta} g(x) = \gamma\end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to\alpha} gof(x) = \gamma$$

Theorème
Soit $f :]a;b[\to \mathbb{R}$.
Si f est croissante, alors f admet dans $\overline{\mathbb{R}}$ une limite en a et b.

- Si f est minorée, $\lim_a f = \inf_{x\in I} f(x)$.
- Si f est non minorée, $\lim_a f = -\infty$.
- Si f est majorée, $\lim_b f = \sup_{x\in I} f(x)$.
- Si f est non majorée, $\lim_b f = +\infty$.

Theorème
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \check{I}$.
Si f est monotone sur I, alors f admet en a une limite à gauche et à droite.

3 Continuité

Définition
f est continue si f est continue en tout point de I.
Prolongement par continuité
Pour prolonger f en a on doit vérifier :

- $a \notin I$ mais a est une borne finie de I.
- $f(x) \underset{a}{\to} l \in \mathbb{R}$

Theorème
Soit $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{R}$.
$(\mathscr{C}(I,\mathbb{R}), +, \times, o)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Propriétés :
- $\left\{\begin{array}{c} f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R}) \\ \forall x \in I, f(x) \neq 0\end{array}\right. \Rightarrow \dfrac{1}{f} \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.
- $\left\{\begin{array}{l} f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R}) \\ g \in \mathscr{C}(J,\mathbb{R})\end{array}\right. \Rightarrow gof \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.
- $f, g \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R}) \Rightarrow |f|, \sup(f,g), \inf(f,g), f^+, f^- \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.

Theorème des valeurs intermédiaires
Soient f continue sur I et $a, b \in I$.

$$\forall y_0 \in [f(a), f(b)], \exists x_0 \in [a;b], f(x_0) = y_0$$

Theorème

L'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle.

Theorème
Toute fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes.

Theorème
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Theorème de la bijection
Soit f continue et strictement monotone sur I.

Alors :

- f établit une bijetion de I sur $J = f(I)$.
- f^{-1} est stricteme,t monotone et de même monotonie que f.
- f^{-1} est continue.
- $\mathscr{C}_{f^{-1}} = S_\Delta(\mathscr{C}_f)$ où $\Delta : y = x$.

4 Continuité uniforme

Définition
f est uniformément continue si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x - x'| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$$

Theorème
Soit f uniformément continue, soient (x_n) et (x'_n) deux suites de points de I.

$$x_n - x'_n \to 0 \Rightarrow f(x_n) - f(x'_n) \to 0$$

Theorème
f uniformément continue $\Rightarrow f$ continue.

Theorème
f lipschitzienne $leadf$ uniformément continue.

Theorème de Heine
f est continue sur un segment $\Rightarrow f$ uniformément continue.

5 Relations de comparaison

Définitions

- $f \underset{a}{\sim} g$ s'il existe une fonction φ telle que $f = \varphi.g$ avec $\varphi \underset{a}{\to} 1$.
- $f =_a o(g)$ s'il existe une fonction ϵ telle que $f = \epsilon.g$ avec $\epsilon \underset{a}{\to} 0$.
- $f =_a \mathscr{O}(g)$ s'il existe une fonction Ψ telle que $f = \Phi.g$ avec Ψ bornée au voisinnage de a.

Propriétés :

- $\sim$ est une relation d'équivalence.
- o et $\mathcal{O}$ sont transitives.
- $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f - g = o(g)$.
- $\begin{cases} f \underset{a}{\rightarrow} 0 \\ l \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f \underset{a}{\sim} l$.
- $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ g \underset{a}{\rightarrow} l \end{cases} \Rightarrow f \underset{a}{\rightarrow} l$.
- $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ g > 0 \text{ au voisinage de } a \end{cases} \Rightarrow f > 0$ au voisinage de a.
- $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ \varphi \underset{a}{\sim} \psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f.\varphi \underset{a}{\sim} g.\psi \\ \dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{\sim} \dfrac{g}{\psi} \end{cases}$.
- $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} g > 0 \\ g \underset{a}{\rightarrow} \lambda \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$.
- $f \underset{a}{\sim} g > 0 \Rightarrow f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.
- $\exp(f) \underset{a}{\sim} \exp(g) \Leftrightarrow f - g \underset{a}{\rightarrow} 0$

Theorème

- $\forall \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \Rightarrow x^\alpha = =_0 \left(\left|\ln(x)^\beta\right|\right)$.
- $\forall \beta \in \mathbb{R}, \alpha < 0 \Rightarrow \left|\ln(x)^\beta\right| = =_0 (x^\alpha)$.
- $\forall \beta \in \mathbb{R}, (\ln(x))^2 = =_{+\infty} o(x^\alpha)$.

6 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Définition

On dit que f est bornée si $|f|$ l'est.

Définition

On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - \alpha| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

Propriétés :

- Unicité de la limite lorsqu'elle existe.
- $f(x) \underset{a}{\rightarrow} l \Rightarrow f$ est bornée au voisinage de a.
- $f(x) = \varphi(x) + \imath.\psi(x) \underset{a}{\rightarrow} l = \alpha + \imath.\beta \Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) \underset{a}{\rightarrow} \alpha \\ \psi(x) \underset{a}{\rightarrow} \beta \end{cases}$
- Linéarité.

Fonctions dérivables

1 Généralités

Définition
f est dérivable en un point $a \in I$ si le rapport $\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\right)_a = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a.
Cette limite est notée $f'(a)$. C'est le nombre dérivé de f en a.

Définition
Dérivée à droite en a : $\lim\limits_{x \to a^+} \left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\right)_a$.
Dérivée à gauche en a : $\lim\limits_{x \to a^-} \left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\right)_a$.

Theorème
Soit $a \in \check{I}$.
Pour que f soit dérivable en a, il faut et il suffit qu'elle soit dérivable à gauche et à droite en a et que

$$f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$$

Theorème
f dérivable en $a \Rightarrow f$ continue en a.

Theorème
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to E$ avec $f(I) \subset J$.
On suppose f dérivable en a et g dérivable en $b = f(a)$.
Alors : gof est dérivable en a et $(gof)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$.

Définition
On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

Theorème
Pour que $f : I \to E$ soit dérivable, il faut et il suffit qu'il existe un élément L de E et une fonction $\epsilon : I \to E$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x - a).(L + \epsilon(x))$$

avec $\epsilon(x) \underset{a}{\to} 0$.

Theorème
Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Soient $f : I \to E$ avec f_i les coordonnées de f.
f dérivable en $a \Leftrightarrow \forall i, f_i$ dérivable en a.

2 Théorèmes

Theorème de Rolle

Hypothèses :

- $f : [a;b] \to E$
- $f \in \mathscr{C}^0([a;b])$
- f dérivable sur $[a;b]$
- $f(a) = f(b)$

Alors : $\exists c \in]a;b[, f'(c) = 0$.

Theorème des accroissements finis

Hypothèses :

- $f : [a;b] \to E$
- $f \in \mathscr{C}^0([a;b])$
- f dérivable sur $[a;b]$

Alors : $\exists c \in]a;b[, f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Theorème : Inégalité des accroissements finis

Hypothèses :

- $f : [a;b] \to E$
- $f \in \mathscr{C}^0([a;b])$
- f dérivable sur $]a;b[$

Alors :

- $\forall x \in]a;b[, m \leq f'(x) \leq M$
- $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

3 Formules de dérivation

Formule de Leibniz

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Applications multilinéaires

Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions dérivables sur I.
Soit B une application multilinéaire.
Alors : $B(f_1, \ldots, f_n)' = B(f_1', \ldots, f_n) + \ldots + B(f_1, \ldots, f_n')$.

4 Classe d'une fonction

Définition

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n.

Propriétés :

- f de classe $\mathscr{C}^n \Rightarrow f$ de classe $\mathscr{C}^p$ pout tout $p \in \{1, \ldots, n\}$.
- Soit $n \geq 1$: f de classe $\mathscr{C}^n \Leftrightarrow f'$ de classe $\mathscr{C}^{n-1}$.
- $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}-$algèbre.
- Soient f, g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, gof est de classe $\mathscr{C}^n$.

Définition

Soit $[a; b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Soit $f : [a; b] \to E$.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux sur I s'il existe une subdivision $c_0 = a < c_1 < \ldots < c_n = b$ telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, la restriction f_i de f à $]c_{i-1}; c_i[$ puisse être prolongée en une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[c_{i-1}; c_i]$.

5 Prolongement

Theorème

Hypothèses :

- $f : I \to E$,
- $x_0 \in I$,
- f continue sur I,
- f dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$,
- $f'(x) \underset{x_0}{\to} l$.

Alors : $\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\right)_x \underset{x \to x_0}{\to} l$.

Theorème

Hypothèses :

- $f : I \to E$,
- $x_0 \in I$,
- f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{x_0\}$,
- $f'(x) \underset{x_0}{\to} l$.

Alors : f de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

6 Théorème de relèvement

Theorème

L'application $\theta \mapsto \exp(\imath.\theta)$ est une bijection de $]-\pi; \pi[$ sur $U \setminus \{-1\}$.
L'application réciproque est notée : $u \mapsto \arg(u)$.
Si $u = x + \imath.y \in U \setminus \{-1\}$ on a $\arg(u) = 2.\arctan \dfrac{y}{1+x}$.

Theorème de relèvement
Soit $f : I \to U \setminus \{-1\}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geq 1$.
Alors : il existe une fonction $F : I \to]-\pi;\pi[$, de classe $\mathscr{C}^k$ telle que $\forall x \in I, f(x) = \exp(\imath.F(x))$.
On dit que F est un relèvement de la fonction f.

7 Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Theorème
Soit $f : I \to J$ avec $I, J \subset E$.
On suppose f continue et strictement monotone sur I, $f(I) = J$.
Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Theorème
Soit $f : I \to E$ dérivable sur $\check{I}$.
Si f admet un extremumu local en un point $x_0 \in \check{I}$, alors $f'(x_0) = 0$.

Theorème
Soit $f : I \to E$ continue sur I et dérivable sur $\check{I}$.

- f croissante $\Leftrightarrow \forall x \in \check{I}, f'(x) \geq 0$.
- f décroissante $\Leftrightarrow \forall x \in \check{I}, f'(x) \leq 0$.
- f constante $\Leftrightarrow \forall x \in \check{I}, f'(x) = 0$.

Theorème
Soit $f : I \to E$ continue sur I et dérivable sur $\check{I}$.

- f croissante $\Leftrightarrow \forall x \in \check{I}, f'(x) \geq 0$ et $\left\{x \in \check{I}, f'(x) = 0\right\}$ ne contient pas d'intervalle non trivial.
.
- f décroissante $\Leftrightarrow \forall x \in \check{I}, f'(x) \leq 0$ et $\left\{x \in \check{I}, f'(x) = 0\right\}$ ne contient pas d'intervalle non trivial.

Divers

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
$$\left(\frac{f}{g^n}\right)' = \frac{f'g - nfg'}{g^{n-1}}$$
$$(gof)' = (g'of).f'$$
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'of^{-1}}$$

Composition

$$(gof)' = f' \times g'of$$

Fonctions réciproques

Soit f dérivable et strictement monotone.

Si $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$: $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f o f^{-1}}$.

Propriétés :

- $\left\{ \begin{array}{c} \forall x \in I, g(x) \neq 0 \\ g \text{ de classe } \mathscr{C}^n \end{array} \right. \Rightarrow \dfrac{1}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

Définition

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

$f : I \to J$ est un $\mathscr{C}^1-$difféomorphisme de I sur J si :

- f est une bijection de I sur J,
- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,
- f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Si f et f^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^n$, on parle de $\mathscr{C}^n-$difféomorphsme.

Theorème

Soit $f \in \mathscr{C}^n(I, J)$.

Pour que f soit un $\mathscr{C}^n$-difféomorphisme, il faut et il suffit que f' ne s'annule par sur I.

DL_n

1 Généralités

Définition
Soit I un intervalle, $D = I$ ou $I \setminus \{a\}$.
f admet un DL_n en a s'il existe $n+1$ réels et une fonction ϵ tels que :

$$\forall x \in D, f(x) = \lambda_0 + \lambda_1.(x-a) + \ldots + \lambda_n.(x-a)^n + (x-a)^n.\epsilon(x)$$

avec $\epsilon(x) \underset{a}{\rightarrow} 0$.

2 DL classiques

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
\dfrac{1}{1-x} & = & 1 & + & x & + & x^2 & + & \ldots & + & x^n & + & o(x^n) \\[2ex]
\ln(1-x) & = & -x & - & \dfrac{x^2}{2} & - & \dfrac{x^3}{3} & - & \ldots & - & \dfrac{x^n}{n} & + & o(x^n) \\[2ex]
\exp(x) & = & 1 & + & x & + & \dfrac{x^2}{2!} & + & \ldots & + & \dfrac{x^n}{n!} & + & o(x^n) \\[2ex]
\sin(x) & = & x & - & \dfrac{x^3}{3!} & + & \dfrac{x^5}{5!} & + & \ldots & + & \dfrac{(-1)^n.x^{2n+1}}{(2n+1)!} & + & o(x^{2n+2}) \\[2ex]
\cos(x) & = & 1 & - & \dfrac{x^2}{2!} & + & \dfrac{x^4}{4!} & + & \ldots & + & \dfrac{(-1)^n.x^{2n}}{(2n)!} & + & o(x^{2n+1}) \\[2ex]
(1+x)^\alpha & = & 1 & + & \alpha.x & + & \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} & + & \ldots & + & \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!} & + & o(x^n) \\[2ex]
\arccos(x) & = & \dfrac{\pi}{2} - x & - & \dfrac{x^3}{6} & - & \dfrac{3}{40}.x^5 & + & \ldots & + & \dfrac{(2n)!}{(2^n.n!)^2}.\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} & + & o(x^{2n+1}) \\[2ex]
\arcsin(x) & = & x & + & \dfrac{x^3}{6} & + & \dfrac{3}{40}.x^5 & + & \ldots & + & \dfrac{(2n)!}{(2^n.n!)^2}.\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} & + & o(x^{2n+1}) \\[2ex]
\arctan(x) & = & x & - & \dfrac{x^3}{3} & + & \dfrac{x^5}{5} & - & \ldots & + & \dfrac{(-1)^n.x^{2n+1}}{2n+1} & + & o(x^{2n+1})
\end{array}$$

3 Propriétés

Propriétés :

- Unicité.
- Si f admet un $DL_n, \forall p \in \{1, \dots, n\}$, f admet un DL_p.
- La partie polynomiale du DL est de même parité que la fonction.

Theorème
Si f admet un DL_0 en 0, alors f est continue(ou prolongeable par continuité) en 0 et réciproquement.

Theorème
Si f admet un DL_1 en 0, alors f est dérivable en 0 et réciproquement.

4 Opérations

Theorème Somme
Soient f et g admettant des DL_n en 0, alors $\alpha.f + \beta.g$ admet un DL_n en 0.

Theorème Produit
Soient f et admettant des DL_n en 0, alors fg admet un DL_n en 0.

Composition
Soit $X = a_p.x^p + \dots + a_n.x^n + o(x^n)$.
Si $\Psi(X) = =_0 o(X^q)$, alors $\Psi(X) \underset{0}{\sim} o(x^{pq})$.

Quotient
Soit $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ avec $D(x) \underset{0}{\rightarrow} 1$.
On posera $D(x) = 1 - X$, d'où $f(x) = N(x).\dfrac{1}{1-X}$.
On termine par la composition et le produit.

5 Intégration

Lemme
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.
On pose $F(x) = \int_0^x f(t).dt$.

$$f \underset{0}{=} o(x^n) \Rightarrow F \underset{0}{=} o(x^{n+1})$$

Theorème
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
Si f' admet un DL_n en 0, alors f admet un DL_{n+1} en 0 obtenu en intégrant terme à terme.

6 DL généralisé

Règle de trois termes.

Fonctions convexes

1 Fonctions convexes sur un intervalle I

Définition
$E_f = \{M(x,y)/x \in Iety \geq f(x)\}$ est l'épigraphe de f.

Définition
f est convexe si E_f est convexe.
f est concave si E_f est concave.

Theorème
f convexe $\Leftrightarrow \forall x_0 \in I$, la fonction pente en x_0 est croissante.

Theorème
f convexe $\Leftrightarrow \forall \lambda \in [0;1], \forall x_1, x_2 \in I, f\big((1-\lambda)x_1 + x_2\big) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$.

Theorème
f convexe $\Rightarrow \forall \lambda_i \in \mathbb{R}$ tels que $\sum \lambda_i = 1, \forall x_i \in I, f\left(\sum \lambda_i x_i\right) \leq \sum \lambda_i f(x_i)$.

2 Cas des fonctions $\mathscr{C}^1$

Theorème
f convexe $\Leftrightarrow f'$ croissante.

Theorème
f convexe $\Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{C}_f, C_f$ est au dessus de la tangente.

Theorème
Si f est deux fois dérivable :
f convexe $\Leftrightarrow \forall x \in I, f''(x) \geq 0$.

Fonctions circulaires réciproques

1 Arcsinus

1.1 Dérivée

$$(Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1.2 Propriétés

$$\begin{array}{ll}
\forall x \in [-1;1] & , \quad Arcsin(-x) = -Arcsin(x). \\
\forall x \in [-1;1] & , \quad sin(Arcsin(x)) = x. \\
\forall x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] & , \quad Arcsin(sin(x)) = x. \\
\forall x \in [-1;1] & , \quad cos(Arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.
\end{array}$$

2 Arccosinus

2.1 Dérivée

$$(Arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.2 Propriétés

$$\begin{array}{ll}
\forall x \in]-1;1[& , \quad Arccos(-x) = \pi - Arccos(x). \\
\forall x \in]-1;1[& , \quad cos(Arccos(x)) = x. \\
\forall x \in [0;\pi] & , \quad Arccos(cos(x)) = x. \\
\forall x \in]-1;1[& , \quad sin(Arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.
\end{array}$$

3 Arctangente

3.1 Dérivée

$$(Arctanx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

3.2 Propriétés

$$\begin{array}{ll}
\forall x \in \mathbb{R} & , \quad Arctan(-x) = -Arctan(x). \\
\forall x \in \mathbb{R} & , \quad tan(Arctan(x)) = x. \\
\forall x \in]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[& , \quad Arctan(tan(x)) = x. \\
\forall x \in \mathbb{R} & , \quad cos(Arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \\
\forall x \in \mathbb{R} & , \quad sin(Arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{array}$$

Trigo

1 Formules élémentaires

$$
\begin{array}{r|r|r|r}
\cos(\pi - t) = -\cos(t) & \cos(\pi + t) - \cos(t) & \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t) & \cos(\frac{\pi}{2} + t) = -\sin(t) \\
\sin(\pi - t) = -\sin(t) & \sin(\pi + t) - \sin(t) & \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t) & \sin(\frac{\pi}{2} + t) = -\sin(t) \\
\tan(\pi - t) = -\tan(t) & \tan(\pi + t) - \tan(t) & \tan(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t) & \tan(\frac{\pi}{2} + t) = -\sin(t)
\end{array}
$$

2 Formules d'addition

$$\cos(a + b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a).\cos(b) + \sin(b).\cos(a)$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a).\tan(b)}$$

3 Formules de duplication

$$\cos(2.x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2.\cos^2(x) - 1 = 1 - 2.\sin^2(x)$$

$$\sin(2.x) = 2.\sin(x).\cos(x)$$

$$\tan(2.x) = \frac{2.\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

4 Expression rationnelle

On pose $t = \tan(\frac{x}{2})$.

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2.t}{1 + t^2} \qquad \tan(x) = \frac{2.t}{1 - t^2}$$

5 Utilisation de la tangente

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \qquad \sin^2(x) = \frac{\tan(2.x)}{1 + \tan^2(x)}$$

6 Linéarisation

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2.x)}{2} \qquad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2.x)}{2}$$

$$\begin{aligned}
\cos(a).\cos(b) &= \frac{1}{2}.\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right] \\
\sin(a).\sin(b) &= \frac{1}{2}.\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right] \\
\sin(a).\cos(b) &= \frac{1}{2}.\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]
\end{aligned}$$

7 Transformation de sommes en produits

$$\begin{aligned}
\sin(p)+\sin(q) &= 2.\sin(\frac{p+q}{2}).\cos(\frac{p-q}{2}) \\
\sin(p)-\sin(q) &= 2.\cos(\frac{p+q}{2}).\sin(\frac{p-q}{2}) \\
\cos(p)+\cos(q) &= 2.\cos(\frac{p+q}{2}).\cos(\frac{p-q}{2}) \\
\cos(p)+\cos(q) &= -2.\sin(\frac{p+q}{2}).\sin(\frac{p-q}{2})
\end{aligned}$$

8 Transformation de $a.\cos(x)+b.\sin(x)$

$$a.\cos(x)+b.\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}.\cos(x-\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

9 Trigonométrie hyperbolique

Les formules de 2 à 7 ont leur équivalent en trigonométrie hyperbolique. Pour l'obtenir, il suffit de changer:

- $\cos(x)$ en $ch(x)$
- $\sin(x)$ en $\imath.sh(x)$
- $\tan(x)$ en $\imath.th(x)$

10 Généralités

Trigonométrie circulaire	Trigonométrie hyperbolic
$\forall t \in \mathbb{R}, \cos^2(t)+\sin^2(t) = 1$	$\forall t \in \mathbb{R}, ch^2(t) - sh^2(t) =$
$\left(\sin(x)\right)' = \cos(x) \qquad \left(\cos(x)\right)' = -\sin(x)$	$\left(sh(x)\right)' = ch(x) \qquad \left(ch(x)\right)'$
$\cos(x) = \frac{\exp(\imath.x)+\exp(-\imath.x)}{2} \qquad \sin(x) = \frac{\exp(\imath.x)-\exp(-\imath.x)}{2}$ $\exp(\imath.x) = \cos(x)+\imath.\sin(x)$	$ch(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-.x)}{2} \qquad sh(x) =$ $\exp(x) = ch(x)+sh(x$
$\forall p \in \mathbb{Z}, \left(\cos(x)+\imath.\sin(x)\right)^p = \cos(p.x)+\imath.\sin(p.x)$	$\forall p \in \mathbb{Z}, \left(ch(x)+sh(x)\right)^p = ch(p.x$
$\left(\tan(x)\right)' = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\left(th(x)\right)' = 1 - th^2(x) = \frac{}{ch}$

Courbes parmétrées

1 DL d'une fonction à valeurs dans E

Définition
Soient $f : I \to E$ et $a \in I$.
On dit que f admet un DL_n au point a s'il existe des coefficients $A_0, \dots, A_n \in E$ tels que :

$$f(x) = A_0 + (x-a)A_1 + \dots + (x-a)A_n + o((x-a)^n)$$

où $o((x-a)^n)$ désigne une fonction de I dans E dont la norme est négligeable devant $(x-a)^n$.

Propriétés :

- Si f admet un DL_n, alors $\forall p \in \{1, \dots, n\}$ f admet un DL_p.
- f admet un DL_0 en $a \Leftrightarrow f$ continue en a et $f(a) = A_0$.
- f admet un DL_1 en $a \Leftrightarrow f$ dérivable en a et $f'(a) = A_1$.
- Si f admet un DL_n alors ce DL_n est unique.
- La partie polynomiale du DL_n possède la parité de f.

Theorème
Soit $f : I \to E$ une fonction continue sur I qui admet un DL_n en a et soit F la primitive de f dont la valeur en a est $F(a)$.
Alors : F possède un DL_{n+1} en a obtenu en intégrant terme à terme le DL de f.

$$F(x) = F(a) + (x-a)A_0 + \frac{(x-a)^2}{2}A_2 + \dots + \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}A_{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

Theorème
Soient $f \in \mathscr{C}^n(I; E)$ et $a \in E$.
Alors : f admet une DL_n en a.

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} (x-a)^k . \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + o((x-a)^n)$$

2 Propriétés affines des courbes paramétrées

Définition
On appelle courbe paramétrée dans E un triplet $\mathscr{C} = (I, f, \Gamma)$ où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \to E$ et $\Gamma = f(I)$.
$f : t \mapsto f(x)$ est appelée la paramétrisation de $\mathscr{C}$.
$\Gamma = \{f(t)/t \in I\}$ est appelé le support de $\mathscr{C}$.
On dit que la courbe $\mathscr{C}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ lorsque sa paramétrisation est de classe $\mathscr{C}^k$.
Si $I = [a; b]$, $\mathscr{C}$ est appelée arc paramétrée.
A est l'origine de l'arc, B est l'extrémité de l'arc.
Si $B = A$, l'arc est dit fermé.

Définition

Soit $\mathscr{C} = (I, f, \Gamma)$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k, k \geq 1$ et soit φ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^k$ d'un intervalle J sur I.
On dit que $\mathscr{C}_1 = (J, fo\varphi, \Gamma)$ est la courbe obtenue en faisant le changement de paramètre $t = \varphi(u)$.
Un tel paramétrage est dit admissible pour $\mathscr{C}$.
Si $\varphi' > 0$, on dit que f et $fo\varphi$ définissent la même orientation.
Si $\varphi' < 0$, on dit que f et $fo\varphi$ définissent des orientations opposées.

Définition

Soit $\mathscr{C} = (I, f, \Gamma)$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$. Soit $t_0 \in I$.
Si $\overrightarrow{u}(t) = \dfrac{f(t) - f(t_0)}{\|f(t) - f(t_0)\|}$ admet une limite finie $\overrightarrow{u}_0$ quand $t \to t_0$, on dit que $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe au point M_0 orienté dans les sens des t croissants.
On définit de même le vecteur unitaire tangent dirigé dans le sens des t décroissants.
Si la courbe possède des vecteurs tangents dans les deux sens, et s'ils sont colinéaires, alors on dit que la courbe possède une tangente au point M_0.

Définition

Soit $\mathscr{C} = (I, f, \Gamma)$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k, k \geq 1$.
Le point $M_0 = f(t_0)$ est dit régulier si $f'(t_0) \neq 0$.
Si $f'(t_0) = 0$, le point est dit stationnaire.

Theorème

Si $M_0 = f(t_0)$ est régulier, la courbe possède une tangente au point M_0 dirigée par le vecteur $f'(t_0)$.

Définition

$\mathscr{C}$ est dite régulière lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ est lorsque $\forall t \in I, f'(t_0) \neq 0$.

Theorème

Soit $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^k$.
Si $\exists p < k, f^(p) \neq 0$.
Alors : la courbe possède une tangente au point $M_0 = f(t_0)$ dirigée par $f^{(p+1)}(t_0)$

Theorème

Un changement de paramétrage admissible ne change pas le sens, ni la direction de la tangente.

Coniques

1 Définition monofocale

Définition
Soient E le plan euclidien, D une droite, F un point $\notin D$ et $e \in \mathbb{R}_+$.
La conique de foyer F, de directrice D et d'exentricité e est $\mathscr{C}(F, D, e) = \{M \in E, MF = e.MH\}$ où $MH = dist(M, d)$.

Définition
Soit (FK) la droite passant par F, orthogonale à D.
C'est un axe de symétrie, on l'appelle l'axe focal.

Définition
S est un sommet de la conique $\mathscr{C}$ si $S \in \mathscr{C} \bigcap (FK)$.

Définition

- Si $e = 1, \mathscr{C}$ est une parabole.
- Si $e > 1, \mathscr{C}$ est une hyperbole.
- Si $e \in]0; 1[, \mathscr{C}$ est une ellipse.

On appelle paramètre le réel $p = e.d$ avec $d = dist(F, D)$.

2 Equation polaire avec un axe polaire d'origine F

$$\rho = \frac{p}{1 + e.\cos(\theta)}$$

3 Parabole

Equation cartésienne

Soit le repère $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ avec $S = F * K$, $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{SF}}{SF}$ et $\overrightarrow{j}$ directement orthogonal à $\overrightarrow{i}$.

$$F \begin{pmatrix} \frac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad D : x = -\frac{p}{2}$$

$$y^2 = 2.p.x$$

Construction
Soit $H \in D$.
M appartient à la médiatrice de (HF) et à $(H, \overrightarrow{i})$.
La tangente à la parabole en M est la médiatrice de $[FH]$.

Equation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{t^2}{2} \\ y = t \end{array}\right. ; t \in \mathbb{R}$$

Tangente en $M(t)$: $-p.X + t.Y - \dfrac{t^2}{2} = 0$.

4 Ellipse

Equation cartésienne

L'ellipse possède deux sommets S et S'.

Soit le repère $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ avec $S = F * K$, $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{OF}}{OF}$ et $\overrightarrow{j}$ directement orthogonal à $\overrightarrow{i}$.

$$\frac{SF}{SK} = e \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{OF} = e.\overrightarrow{OS} \\ \overrightarrow{OS} = e.\overrightarrow{OK} \end{array}\right.$$

$$e = \frac{OF}{OS} = \frac{c}{a}$$

$$S\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad F\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D : x = \frac{a^2}{c}$$

On pose $a^2 = b^2 + c^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Représentations paramétriques

$$\left\{\begin{array}{l} x = a.\cos(t) \\ y = b.\sin(t) \end{array}\right. ; t \in \mathbb{R}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = a.\dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ y = b.\dfrac{2.u}{1+u^2} \end{array}\right. ; t \in \mathbb{R}$$

5 Ellipse et cercle

On cherche l'image d'un cercle de rayon R par une affinité orthogonale d'axe $(O, \overrightarrow{x})$ et de rapport k.

$$\frac{x}{R^2} + \frac{y}{k^2.R^2} = 1$$

Fonctions de plusieurs variables

1 Fonctions différentiables

Définition
Soient $f : \mathscr{O} \to F$ et $a \in \mathscr{O}$.
On dit que f est différentiable au point a s'il existe une application linéaire $l : E \to F$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + l(h) + o(\|h\|)$$

Définition
Lorsqu'elle existe l'application l est appelée la différentielle de f au point a.
On la note $df(a)$.

Theorème
La différentielle de f en un point est unique.

Theorème
Si $f : \mathscr{O} \to F$ est différentiable en a, alors f est coninue en a.

2 Dérivée d'une fonction en un point

Définition
On dit que f est dérivable en a suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$ si la fonction $g : t \mapsto f(a + t.\overrightarrow{u})$ est dérivable au point $t = 0$.
La dérivée $g'(0)$ si elle existe est un vecteur de F noté $D_{\overrightarrow{u}}f(a)$.

Définition
Soit $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E.
Les dérivées partielles de f sont les dérivées dans la direction des vecteurs de base.
On les note $D_{\overrightarrow{u_i}}f(a)$ ou $D_i f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Theorème
Soient $f : \mathscr{O} \to F$ et $a \in \mathscr{O}$.
Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée suivant n'importe quel vecteur $\overrightarrow{u}$ au point a.De plus $D_{\overrightarrow{u}}f(a) = df(a)(\overrightarrow{u})$.

Définition
Soient

- $\mathscr{U}$ une base de E et $\mathscr{V}$ une base de F.
- $\mathscr{O} \subset E$.
- $f : \mathscr{O} \to F$.

La matrice de l'application linéaire $df(a)$ dans le couple de bases $(\mathscr{U},\mathscr{V})$ est appelée la matrice jacobienne de f au point a.

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

3 Fonctions continûment différentiables

Définition

f est dite différentiable sur $\mathscr{O}$ si elle est différentiable en chaque point a de $\mathscr{O}$.
L'application de $\mathscr{O}$ dans $\mathscr{L}(E,F)$ définie par $a \mapsto df(a)$ est notée df et est appelée la différentielle de f.
On dit que f est continûment différentiable sur $\mathscr{O}$ si elle est différentiable sur $\mathscr{O}$ et si df est continue.

Définition

f est de classse $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathscr{O}$ si pour tout vecteur $u \neq 0$:

- f admet en tout point de $\mathscr{O}$ une dérivée partielle première $D_u f(a)$.
- $D_u f$ est continue.

Theorème

Pour $f : \mathscr{O} \to F$ soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$, il faut et il suffit que f admette des dérivées partielles en chaque point a de $\mathscr{O}$ et que ses dérivées partielles soient continues.

Theorème fondamental

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies et continues sur $\mathscr{O}$.

Alors :

- f admet en fout point a de $\mathscr{O}$ un DL_1

$$f(a+u) = f(a) + h.\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k.\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \|u\|.\epsilon(u)$$

  avec $u = (h,k)$ et $\epsilon(u) \underset{(0,0)}{\to} 0$.
- $D_u f$ existe en tout point a.

$$D_u f(a) = h.\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k.\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$.

Theorème

Si f est différentiable en a et si g est différentiable en $f(a)$, alors gof est différentiable en a.
De plus $d(gof)(a) = dg(f(b))odf(a)$.

Theorème

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$, alors gof est de classe $\mathscr{C}^1$ et $d(gof) = (dgof)odf$.
Matrice jacobienne de la composée

$$J(gof)(a) = J(g)(f(a)).J(f)(a)$$

4 Difféomorphisme

Définition

Soit f différentiable sur un ouvert $\mathscr{O}$ de E.
On appelle le jacobien de f le déterminant de la matrice jacobienne de f.

Définition

Soient $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$ deux ouverts de E.
On appelle difféomorphisme de $\mathscr{O}_1$ sur O_2 une bijection f de $\mathscr{O}_1$ sur $\mathscr{O}_2$ telle que f et f^{-1} soient de classe $\mathscr{C}^1$.

Theorème

Soit $f : \mathscr{O}_1 \to \mathscr{O}_2$ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$.
Alors : en chaque point $x \in \mathscr{O}_1$, $df(x)$ est un automorphisme de l'EV E et :

$$\left[df(x)\right]^{-1} = df^{-1}(f(x))$$

$$\left[Jf(x)\right]^{-1} = Jf^{-1}(x)$$

Theorème

Soient $\mathscr{O}$ un ouvert de E et f une application injective de classe $\mathscr{C}^1$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathscr{O}' = f(\mathscr{O})$ est un ouvert de E et f est un $\mathscr{C}^1-$difféomorphisme de $\mathscr{O}$ sur $\mathscr{O}'$.
- $df(x)$ est un automorphsme en chaque point $x \in \mathscr{O}$.
- $\forall x \in \mathscr{O}, \det(Jf(x)) \neq 0$.

5 Cas des fonctions à valeurs réelles

Soient :

- E un $\mathbb{R}-$EV de dimension p muni d'une base $\mathscr{B}$.
- $\mathscr{O}$ un ouvert de E.

Définition

On note dx_i la i-ème forme coordonée dans la base $\mathscr{B}$.
$(dx_1, \ldots, dx_n)$ est la base duale de $\mathscr{B}$.
Dans ce cas

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)$$

$$df(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) o dx_i$$

Theorème

Pou que f soit continûment différentiable sur $\mathscr{O}$, il faut et il suffit que les p dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existent et soient continues sur $\mathscr{O}$.

Theorème

$\mathscr{C}^1(\mathscr{O}, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Définition

Si $ain\mathscr{O}$, le vecteur $\sum_{i=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(e_1)$ est appelé le gradient de f au point a.

Theorème

$$\forall a \in \mathscr{O}, \forall h \in E, df(a)(h) =< grad(f(a)), h >$$

Theorème

$$\forall a \in \mathscr{O}, \|df(a)\| \leq M \Rightarrow \forall a, b \in \mathscr{O}, \|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a)$$

Theorème

Soit $\mathscr{O}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{O}, \mathbb{R})$.

$$f \text{est constante sur } \mathscr{O} \Leftrightarrow df = \tilde{0}$$

6 Extremums

Définition

Soit $a \in \mathscr{O}$:

- On dit que f présente un maximum relatif au point a,
  s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in \mathscr{O} \bigcap V, f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f présente un maximum relatif stricte au point a,
  s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in \mathscr{O} \bigcap V \setminus \{a\}, f(x) < f(a)$.
- On dit que f présente un maximum absolu au point a,
  si $\forall x \in \mathscr{O}, f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f présente un maximum absolu stricte au point a,
  si $\forall x \in \mathscr{O} \setminus \{a\}, f(x) < f(a)$.

Définitions analogues pour le minimum.

Theorème

Soient $\mathscr{O}$ un ouvert de E et $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{O}, \mathbb{R})$.
Si f présente un extremum relatif au point $a \in \mathscr{O}$, alors $df(a) = 0$.

Définition

Soit $\mathscr{O}$ un ouvert de E et $a \in \mathscr{O}$.
On dit que a est un point critique de f si $df(a) = 0$.

Theorème

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{O}, \mathbb{R})$ avec $\mathscr{O}$ ouvert.
Si f présente un extremum relatif en a, a est un point critique de f.

7 Dérivées partielles d'ordre supérieur à 1

Définition
$f : \mathscr{O} \to \mathscr{F}$ est dite de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{O}$ si elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sir $\mathscr{O}$ et si chacune des dérivées partielles est elle-même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$.

Theorème de Schwarz
Si $f \in \mathscr{C}^2(\mathscr{O}, F)$, alors $\forall i, j : \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Theorème
$\mathscr{C}^2(\mathscr{O}, F)$ est un SEV de $\mathscr{C}^1(\mathscr{O}, F)$.

Définition
$f : \mathscr{O} \to F$ est dite de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ et si chacune des dérivées partielles est de classe $\mathscr{C}^n$.

Theorème
Le théorème de Schwarz se généralise aux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$.

8 Formule de Taylor-Young pour une fonction de deux variables

Soient $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

Theorème
Soit $A = (a, b) \in \mathscr{O}$.
Alors :

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + h.\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k.\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \frac{1}{2}\left(h^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2.h.k.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + o\left(\|(h,k)\|^2\right)$$

Application à la recherche d'extrema
On reconnaît une forme quadratique dont la matrice est :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

Lorsque la forme quadratique est dégénérée, on dit que le point critique (a, b) est dégénéré.
Si la forme quadratique est non dégénérée, elle admet deux valeurs propres λ et μ.
Si :

- λ et $\mu > 0$: f admet un minimum local stricte en (a, b).
- λ et $\mu < 0$: f admet un maximum local stricte en (a, b).
- $\lambda < 0$ et $\mu > 0$: le point $f(a, b)$ est un point col.

On sait que $\begin{cases} \lambda + \mu = r + t \\ \lambda.\mu = r.t - s^2 \end{cases}$. Donc :

- $r, t > 0$ et $r.t - s^2 \Leftrightarrow$ minimum relatif stricte.
- $r, t < 0$ et $r.t - s^2 \Leftrightarrow$ maximum relatif stricte.
- $\lambda.\mu < 0$ pas d'extremum.

Surfaces

1 Surface paramétrée

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$

$$F \left| \begin{array}{lcl} \mathscr{U} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & F(u,v) \begin{pmatrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\Sigma = \left\{ \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) / (u,v) \in \mathscr{U} \right\}$$

$S = (\mathscr{U}, F, \Sigma)$ est une surface paramétrée de support Σ, de paramétrisation F et de domaine de définition $\mathscr{U}$.

2 Plan tangent en un point

Définition

Soit $S = (\mathscr{U}, F, \Sigma)$ une surface paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$.

Un point $M_0 = F(u_0, v_0)$ est dit régulier si $\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0), \dfrac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$ forme un système libre.

Sinon M_0 est dit singulier.

Si M_0 est un point régulier, le plan passant par M_0 et de direction $\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0), \dfrac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$ est appelé le plan tangent à la surface au point M_0.

Theorème

Le point $M_0 = F(u_0, v_0)$ est régulier si et seulement si $\overrightarrow{N} = \dfrac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \overrightarrow{0}$.

Le vecteur $\overrightarrow{N}$ est le vecteur normal à la surface au point M_0.

Equation du plan tangent

$$M(x,y,z) \in \Pi_0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0 M} \perp \overrightarrow{N} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0 M}.\overrightarrow{N} = 0 \Leftrightarrow \det(M_0, M, N) = 0$$

$$\Pi_0 : (x - x_0).\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0).\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + (z - z_0).\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0) = 0$$

3 Surface d'équation $F(x,y,z) = 0$

Définition

Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de Σ.

On dit que Σ admet une paramétrisation locale au voisinage de M_0 s'il existe un voisinage de M_0 de la forme :

$$Q =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]y_0 - \beta, y_0 + \beta[\times]z_0 - \gamma, z_0 + \gamma[$$

tel que $Q \bigcap \Sigma$ soit le support d'une surface paramétrée.

Définition
Un point M_0 est dit régulier si $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(M_0), \frac{\partial F}{\partial y}(M_0), \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)\right) \neq (0,0,0)$ donc si $grad\, F(M_0) \neq 0$.

Theorème des fonctions implicites
Soit $F : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{O}$ de $\mathbb{R}^3$, et soit M_0 un point tel que $F(M_0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Alors : il existe un voisinage Q de M_0 tel que $\forall (x,y,z) \in \mathscr{Q}, \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \neq 0 \\ F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = f(x,y) \end{cases}$.

Cette fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))}$$

4 Courbe tracée sur une surface

Définition
Soit $t \mapsto \varphi(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
On dit que $C = (I, \varphi, \Gamma)$ est une courbe (paramétrée) tracée sur Σ si $\forall t \in I, \varphi(t) \in \Sigma$.

Theorème
La tangente à la courbe au moint M_0 régulier est contenue dans le plan tangent à Σ.

Définition
Il s'agit de l'intersection de Σ avec les plans d'équations $z = cst$.

Définition
On suppose S de classe $\mathscr{C}^1$ et régulière.
On définit $F_1 : u \mapsto F(u, v_0)$ la première ligne coordonée.
On définit $F_2 : u \mapsto F(u_0, v)$ la seconde ligne coordonée.

Theorème

5 Position d'une surface par rapport au plan tangent

Theorème
Soit

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2(M_0)} \end{pmatrix}$$

Soient λ et μ les valeurs propres de M, si :

- $\lambda.\mu < 0$, la surface coupe le plan tangent.
- $\lambda, \mu > 0$, la surface est au dessus du plan tangent.
- $\lambda, \mu < 0$, la surface est en dessous du plan tangent.

Formes différentielles

Soit E un $\mathbb{R}-$EV de dimension n.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On note $(dx_1, \ldots, dx_n)$ la base duale de $\mathscr{B}$.

1 Généralités

Définition
Soit $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
On appelle forme différentielle (de degré 1) une application ω de $\mathscr{O}$ dans E^*.
On note $P_i(x_1, \ldots, x_n)$ les composantes de ω dans la base $\mathscr{B}$.
Les P_i sont des applications de θ dans $\mathbb{R}$.
On peut écrire : $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i.dx_i$

Définition
On dit que ω est de classe $\mathscr{C}^k$ si chaque composante P_i est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathscr{O}$.

Définition
S'il existe une fonction f telle que $\omega = df$, alors on dira que la forme différentielle ω est exacte et que f est une primitive de ω.

Theorème
Si $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i.dx_i$ est une forme différentielle :

$$\omega \text{ exacte} \Leftrightarrow \exists F \in \mathscr{C}^1(\mathscr{O}, \mathbb{R}), \forall i \in \{1, \ldots, n\}, P_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Définition
Soit $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i.dx_i$ une forme différentielle définie sur un ouvert $\mathscr{O}$ de $\mathbb{R}^n$.
On dit que cette forme différentielle est fermée si elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$ et si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \dfrac{\partial P_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial P_j}{\partial x_i}$.

Theorème

$$\omega \text{ exacte de classe } \mathscr{C}^1 \Rightarrow \omega \text{ fermée}$$

Theorème

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathscr{O} \text{ un ouvert étoilé} \\ \omega \text{ fermée} \end{array} \right. \Rightarrow \omega \text{ exacte}$$

2 Intégrale curviligne

Définition

Soit $\mathscr{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.
Soit $\omega = \sum_{i=1}^n P_i.dx_i$ une forme différentiell continue sur $\mathscr{O}$.
Soit $\Gamma = \big([a;b], \varphi, C = \varphi([a;b])\big)$ avec $\forall t \in [a;b], \varphi(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$. On appelle intégrale curviligne le long de l'arc C, l'intégrale :

$$\int_C \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n P_i(x_1(t), \dots, x_n(t)).x_i'(t).dt$$

Avec la relation de Chasles, on peut étendre la définition au cas où π est continue, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Theorème

Un changement de paramétrage admissible ne change pas l'intégrale curviligne.

Theorème

Soit ω une forme différentielle exacte et f une primitive de ω.

$$\int_C = f(B) - f(A)$$

où A et B sont les extrémités de C.
Si l'arc C est fermé, on a $\int_C \omega = 0$.

Définition

Soit $\mathscr{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.
On dit que $\mathscr{O}$ est étoilé par rapport au point A si $\forall M \in \mathscr{O}, [AM] \subset \mathscr{O}$.

Theorème de Poincaré

Soient $\mathscr{O}$ un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ et ω une forme différentielle sur $\mathscr{O}$, de classe $\mathscr{C}^1$ et fermée.
Alors : ω est exacte.

3 Champ de vecteurs

Définition

Soit $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Un champ de vecteurs sur $\mathscr{O}$ est ue application :

$$V \left| \begin{array}{lcl} \mathscr{O} & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ M = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & V(M) \begin{pmatrix} P_1(M) \\ \cdots \\ P_n(M) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

où les P_i sont des fonctions de $\mathscr{O}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition

V est dit de classe $\mathscr{C}^k$ si chacune des composantes est de classe $\mathscr{C}^k$.

Définition

Soient

$$V \left| \begin{array}{lcl} \mathscr{O} & \to & \mathbb{R}^n \\ M = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & V(M) \begin{pmatrix} P_1(M) \\ \cdots \\ P_n(M) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

et

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i . dx_i$$

On dit que ω et V sont associés.

Définition

Soit $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

$$G \left| \begin{array}{lcl} \mathscr{O} & \to & \mathbb{R}^n \\ M = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & V(M) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(M) \\ \cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(M) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est appelé le champ de gradient associé à f.
On dit aussi que f est un potentiel scalaire du champ G.
On dit aussi que V dérive du potentiel f.

Theorème

V dérive du potentiel scalaire f si et seulement si la forme différentielle associée est exacte.

Theorème de Poincaré

Soit V un champ de vecteur de classe $\mathscr{C}^1$ défini sur un ouvert étoilé $\mathscr{O}$.

$$V \left| \begin{array}{lcl} \mathscr{O} & \to & \mathbb{R}^n \\ M = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & V(M) \begin{pmatrix} P_1(M) \\ \cdots \\ P_n(M) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Pour que V dérive d'un potentiel, il faut et il suffit que $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \dfrac{\partial P_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial P_j}{\partial x_i}$.

Définition

$$\mathscr{C} = \int_C V = \int_C \omega$$

où ω est la forme différentielle associée à V.
Si V dérive du potentiel f, $V = grad(f)$, alors $\int_C grad(f) = f(B) - f(A)$.
En particulier si l'arc est fermé : $\int_C grad(f) = 0$.

Définition

V est dit régulier sur $\mathscr{O}$ si $\forall M \in \mathscr{O}, V(M) \neq 0$.

Définition

Une courbe paramétrée $C = (I, \varphi, \Gamma)$ est appelée une trajectoire du champ de vecteur V si C est de classe $\mathscr{C}^1$, régulière, si $\Gamma \subset \mathscr{O}$ et si en chaque point $t \in I$, la tangente à la courbe au point $\varphi(t)$ est

dirigée par le vecteur $V(\varphi(t))$.
$\varphi'(t)$ est alors un vecteur directeur de l tangente à la courbe au point $\varphi(t)$.

Définition
C est régulière si $\forall t \in I, \varphi'(t) \neq 0$.

Theorème
Pour que C soit une trajectoire du champ de vecteur régulier V, il faut et il suffit que $\forall t \in I, \exists \lambda_t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = \lambda_t . V(\varphi(t))$ avec $t \mapsto \lambda_t$ une fonction de t.

Theorème
Les trajectoires d'un champ de vecteur régulier sont les courbes intégrales du système différentiel associé.

4 Champ de vecteur dans $\mathbb{R}^3$

Définition
On définit l'opérateur $\overrightarrow{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

$$div(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F}$$
$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F}$$

Propriétés :

- div et $\overrightarrow{rot}$ sont des opérateurs linéaires.
- $div(\overrightarrow{rot}(F)) = 0$.

Theorème
Si F dérive d'un potentiel scalaire, alors $\overrightarrow{rot}(F) = \overrightarrow{0}$.

Theorème
Soit $F : \mathscr{O} \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs avec $\mathscr{O}$ un ouvert étoilé.
Si $\overrightarrow{rot}(F) = \overrightarrow{0}$, alors F dérive d'un potentiel scalaire.

Intégrale double

1 Ensembles quarrables

On admet l'existence d'un sous ensemble de parties du plan et d'une application $\mu \left| \begin{array}{ccc} Q & \to & \mathbb{R}_+ \\ A & \mapsto & \mu(A) \end{array} \right.$ telle que :

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(\mathscr{R}) = |(b-a)(d-c)|$ où $\mathscr{R}$ est un rectangle.
- $[A, B \in Q$ et $A \subset B] \Rightarrow [\mu(A) \leq \mu(B)]$
- $A, B \in Q \Rightarrow \begin{cases} A \bigcup B \text{ et } A \bigcap B \in Q \\ \mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \bigcap B) \end{cases}$
- $A \in Q$ et f une isométrie du plan $\Rightarrow f(A) \in Q$ et $\mu(f(a) = \mu(A)$.
- Si $\gamma = ([a;b], f)$ est un arc âramétré plan avec f continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors la courbe $\Gamma = f([a;b])$ est quarrable et $\mu(\Gamma) = 0$.

2 Intégrale double d'une fonction bornée sur une partie quarrable

Définition
On dit que f est intégrable sur A si $\sup(s_p) = \inf(S_p) = I$.
On note alors $\displaystyle\iint_A f = \iint_A f(x,y).dx.dy = I$.

Theorème
f continue et A compact $\Rightarrow f$ intégrable sur A.

Propriétés :

- Si $A, B \in Q$ et $\mu(A \bigcap B) = 0$, alors f est intégrable sur $A \bigcup B$ si et suelement si f est intégrable sur A et f intégrable sur B.
$$\iint_{A \bigcup B} f = \iint_A f + \iint_B f$$
- Si f, g sont intégrables sur A, alors $\lambda.f + \mu.g$ est intégrable sur A et
$$\int_A (\lambda.f + \mu.g) = \lambda. \iint_A f + \mu. \iint_A g$$
L'ensemble I_A des fonctions intégrables sur A est un $\mathbb{R}-$EV et $f \mapsto \displaystyle\iint_A f$ est une forme linéaire sur I_A.
- f intégrable et $f \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\iint_A f \geq 0$.
- f intégrable sur $A \Rightarrow |f|$ intégrable sur A et $\displaystyle\left| \iint_A f \right| \leq \iint_A |f|$.

- Soit $m = \int_A f$ et $M = \sup_A f$.

$$m.\mu(A) \leq \iint_A f \leq M.\mu(A)$$

- Aire : $\displaystyle\iint_A 1 = \mu(A)$.

3 Théorème de Fubini

Définitions

Pavé : $P = [a;b] \times [c;d]$.

Theorème

Soit f une fonction continue sur un pavé $P = [a;b] \times [c;d]$.

$$\iint_A f(x,y).dx.dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y).dy \right).dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y).dy \right).dy$$

Si $f(x,y) = \varphi(x) * \psi(y)$:

$$\iint_A f(x,y).dx.dy = \int_a^b \varphi(x).dx * \int_c^d \psi(y).dy$$

Définition

Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{R})$ telles que $\forall t \in [a;b], \varphi(x) \leq \psi(x)$.
Compact élémentaire de type I :

$$K = \{(x,y)/x \in [a;b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

Compact élémentaire de type II :

$$K = \{(x,y)/y \in [a;b], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

Compact Simple : union de compact élémentaires telle que $\forall (i,j), i \neq j \Rightarrow \mu(K_i \bigcap K_j) = 0$.

Theorème

Soit f une fonction continue sur un compact de type I :

$$\iint_A f(x,y).dx.dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y).dy \right).dx$$

Soit f une fonction continue sur un compact de type II :

$$\iint_A f(x,y).dx.dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y).dx \right).dy$$

4 Changement de variable

Soit $\mathscr{U}$ et $\mathscr{O}$ deux ouverts du plan et ψ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{O}$.

$$\Psi : (u,v) \mapsto \Psi(u,v) \begin{pmatrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{pmatrix}$$

On note $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ le jacobien de Ψ.
Soit f une fonction continue de $\mathscr{O}$ dans $\mathbb{K}$.
Soit Δ un compact simple contenu dans $\mathscr{U}$ et D un compact simple contenu dans $\mathscr{O}$.
On suppose que $\Psi(\Delta) = D$ et que l'ensemble des points de D ayant plusieurs antécédents par Ψ est un ensemble 'négligeables'.
Dns ce cas :

$$\iint_D f(x,y).dx.dy = \iint_\Delta f\left(x(u,v),y(u,v)\right).\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|.du.dv$$

Cas des coordonnées polaires

$$\iint_D f(x,y).dx.dy = \iint_\Delta f\big(r.\cos(\theta), r.\sin(\theta)\big).\left|r\right|.dr.d\theta$$

Formule de Green-Riemann

$$\int_\Gamma \omega = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).dx.dy$$

Application au calcul d'aires

$$\mu(A) = \iint_A dx.dy = \int_\Gamma x.dy = -\int_\Gamma y.dx = \frac{1}{2}.\int_\Gamma (x.dy - y.dx)$$

Cas des courbes en polaire

$$\mu(A) = \frac{1}{2}.\int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta).d\theta$$

Calcul des intégrales triples

1 Théorème de Fubini

Theorème
Soient $\Delta = [a;b] \times [c;d] \times [e;f]$ et f continue sur Δ.

$$\iiint_\Delta f(x,y,z).dx.dy.dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z).dz \right).dy \right).dx$$

On peut permutter x, y et z.
Si $f(x,y,z) = u(x).v(y).w(z)$:

$$\iint_\Delta f(x,y,z).dx.dy.dz = \int_a^b u(x)dx \int_c^d v(y)dy \int_e^f w(z)dz$$

Theorème : Sommation par pile
Soit D un compact quarrable. Soient u, v continues sur D telles que $\forall (x,y) \in D, u(x,y) \leq v(x,y)$.
Soit $\Delta = \{(x,y,z), (x,y) \in D \text{ et } u(x,y) \leq z \leq v(x,y)\}$.

$$\iiint_\Delta f(x,y,z).dx.dy.dz = \iint_D \left(\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z).dz \right).dx.dy$$

On peut permutter x, y et z.

Theorème : Sommation par tranches
Soit $\Delta = \{M(x,y,z)/a \leq z \leq b \text{ et } (x,y) \in D(x)\}$ avec $D(z)$ un compact quarrable.
Soit f continue sur Δ.

$$\iiint_\Delta f(x,y,z).dx.dy.dz = \int_a^b \left(\iint_{D(z)} f(x,y,z).dx.dy \right).dz$$

2 Changement de variable

Soit $\mathscr{U}$ et $\mathscr{O}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\Psi \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathscr{O})$.

$$\Psi : (u,v,w) \mapsto \Psi(u,v,w) \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$$

Soit D un compact simple inclus dans $\mathscr{O}$ et Δ un compact simple inclus dans $\mathscr{U}$.
On suppose que $\Psi(\Delta) = D$ et que l'ensemble des poins de D ayant plusieurs antécédents par Ψ est négligeable.
Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathscr{O}, \mathbb{R})$.

$$\iiint_D f(x,y,z).dx.dy.dz = \iiint_\Delta f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big). \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| .du.dv.dw$$

Cas du passage en cylindriques

$$\left\{\begin{array}{l} x = r.\cos(\theta) \\ y = r.\sin(\theta) \\ z = \quad z \end{array}\right.$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = -r$$

Cas du passage en sphérique

$$\left\{\begin{array}{l} x = r.\cos(\theta).\cos(\varphi) \\ y = r.\sin(\theta).\cos(\varphi) \\ z = \quad r.\sin(\varphi) \end{array}\right.$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2.\cos(\varphi)$$

Cas d'un changement affine

$$\frac{D(x',y',z')}{D(x,y,z)} = \det(A)$$

où A est la matrice du changement.

Equations différentielles

1 Généralités

Définition

$$(E) : x' = a(t).x + b(t)$$
$$(H) : x' = a(t).x$$

Theorème

Soit A une primitive de a sur I.
Alors : les solutions de (H) sont de la forme $x(t) = \lambda \exp(A(t))$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$S_H = Vect(t \mapsto \exp(A(t))$$

Theorème

Les solutions de E sont de la forme $x = \lambda. \exp(A(t))$ où λ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I vérifiant :

$$\lambda'. \exp(A(t)) = b(t)$$

Soit B une primitive sur I de la fonction $b(t). \exp(-A(t))$.
Les solutions de E sont de la forme : $x(t) = (B + \lambda). \exp(A(t))$.

Theorème

L'ensemble des solutions de (E) est un sous-espace affine de direction S_H.

Theorème de Cauchy

Il existe une et une seule solution x de (E) vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

2 Extension

$$(E) : a(t).x' + b(t).x + c(t)$$

Si a ne s'annule pas sur I on est ramené au cas précédent.
Si a s'annule sur I, on étudie l'équation sur des intervalles où a ne s'annule pas.

Theorème

Soit t_0 un point où a s'annule.
Si $\lim_{x \to t_0^-} y_1(x) = \lim_{x \to t_0^+} y_2(t)$ et si $\lim_{x \to t_0^-} y_1'(x) = \lim_{x \to t_0^+} y_2'(t)$.
Alors : $y(t) = \left\{ \begin{array}{c} y_1(t) \text{ si } t \in I_1 \\ y_2(t) \text{ si } t \in I_2 \bigcup \{t_0\} \end{array} \right.$ est une solution de (E) sur $I = I_1 \bigcup I_2$.
On dit que la solution y est un prolongement de y_1 et de y_2. On dit aussi que y_1 et y_2 se raccordent en t_0.

Systèmes différentiels linéaires

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

1 Généralités

Définition
Un système différentiel linéaire est un système de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & a_{11}(t).x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t).x_n + b_1(t) \\ x_2' & = & a_{21}(t).x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t).x_n + b_2(t) \\ & \ldots & \\ x_n' & = & a_{n1}(t).x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t).x_n + b_n(t) \end{array}\right.$$

où les a_{ij} sont n^2 fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$, les b_{ij} sont n fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

$$(S) \Leftrightarrow X' = A(t).X + B(t)$$

Définition
Soit $t \mapsto X(t)$ une solution définie sur I de l'équation. La courbe associée est appelé une courbe intégrale de l'équation.

Theorème de Cauchy
Il existe une et une seule solution de (S) qui vérifie la condition initiale $X(t_0) = x_0$.

2 Structure de l'ensemble des solutions

Définition
Le système $(H) : X' = A(t).X$ où $X \in M_{n1}(\mathbb{K})$ est le système homogène associé au système (S).

Theorème
L'ensemble $\mathscr{H}$ des solutions de (H) est un SEV de dimension n de l'EV $\mathscr{C}^1(I; E)$.

Définition
Une base $(U_1, \ldots, U_n)$ de l'EV $\mathscr{H}$ est appelé système fondamental de solutions.

Theorème
L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions du système (S) est un SEA de $\mathscr{C}^1(I, E)$ de direction $\mathscr{H}$.

3 Wronskien, méthode de variation des constantes

Theorème
Soient $U_1, \dots, U_n$, n solution de (H). Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- $(U_1, \dots, U_n)$ forme un système fondamental de solutions de (H).
- $\exists t_0 \in I$ tel que $(U_1(t_0), \dots, U_n(t_0))$ est libre.
- $\forall t \in I, \det(U_1(t), \dots, U_n(t)) \neq 0$.
- $\exists t_0 \in I, \det(U_1(t_0), \dots, U_n(t_0)) \neq 0$.

Définition
Si $U_1, \dots, U_n$ sont n solutions de (H), l'application $t \mapsto \det(U_1(t), \dots, U_n(t))$ est appelée le Wronskien du système $(U_1, \dots, U_n)$.

Theorème
$W'(t) = Tr(A(t)).W(t)$

Theorème
Soit $(U_1, \dots, U_n)$ un système fondamental de solutions.
Soit $V : I \to \mathbb{K}^n$ une solution.
Alors : il existe des fonctions uniques $v_1, \dots, v_n$ de $I \to \mathbb{K}$ telles que :

$$\forall t \in I, V(t) = v_1(t).U_1(t) + \ldots + v_n(t).U_n(t)$$

Les fonctions $v_1, \dots, v_n$ sont continues si V est continue, de classe $\mathscr{C}^1$ si V est de classe $\mathscr{C}^1$.

Theorème
Soit (U_1, U_n) un système fondamental des solutions de (H).
Alors : les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme :

$$X(t) = \lambda_1(t).U_1(t) + \ldots + \lambda_n(t).U_n(t)$$

où $\lambda_i \in \mathscr{C}^1(I; \mathbb{K})$ telles que :

$$\lambda_1'(t).U_1(t) + \ldots + \lambda_n'(t).U_n(t) = B(t)$$

4 Systèmes à coefficients constants

Définition
Un système est autonome si : $X' = A.X$ avec $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Theorème
$\forall t, u \in \mathbb{R}, \exp((t+u).A) = \exp(t.A).\exp(u.A)$.

Theorème
Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et X_0 fixé dans $\mathbb{K}^n$.
Soit $X : t \mapsto \exp(t.A).X_0 = F(t).X_0$
$X \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ et $X'(t) = F'(t).X_0 = A.F(t).X_0 = A.(F(t).X_0)$.

$$X' = A.X$$

Theorème
Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et X_0 fixé dans $\mathbb{K}^n$, l'unique solution X de H qui vérifie la condition initiale $X(t_0) = X_0$ est la fonction $X : t \mapsto \exp((t - t_0).A).X_0$.

- $X : t \mapsto \exp((t - t_0).A).X_0$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- $X'(t) = A.\exp((t - t_0).A).X_0$
- $X'(t) = A.X(t)$
- $X(t_0) = X_0$

Theorème
L'ensemble des solutions de (H) est l'ensemble des fonctions $t \mapsto \exp(t.A).X_0$, X_0 parcourant $\mathbb{K}^n$.

Theorème
Si A est diagonalisable.
Soient $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ une base de vecteur propres de A et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. $(\exp(\lambda_1.t).U_1), \ldots, \exp(\lambda_n.t).U_n)$ forme un système fondamental de solutions de (H).

Méthode
Si A est triangulaire, on résoud la dernière équation et on remonte.

Méthode
Si A est trigonalisable.
$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), T \in T_n(\mathbb{K}), T = P^{-1}.A.P$.
On pose $Y = P^{-1}.X$.

$$X' = A.X \Leftrightarrow P.Y' = A.P.Y \Leftrightarrow Y' = P^{-1}.A.P.Y \Leftrightarrow Y' = T.Y$$

On obtient un système triangulaire que l'on sait résoudre.

Theorème
Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $X = \exp(t.A).Y$ où $Y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ qui vérifie $\exp(t.A).Y' = B(t)$. D'où $X = \exp(t.A).\left[\int_0^t \exp(-t.A).B(u).du + Y_0\right]$.

Equations différentielles linéaires du second ordre

1 Généralité

Définition

$$(E) : x''(t) + a(t).x'(t) + b(t).x(t) + c(t) = 0$$

où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.
Quand $c = \tilde{0}$, on dit que l'équation est homogène.
Une solution de E est une fonction $x : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable telle que $\forall t \in I, x''(t) + a(t).x'(t) + b(t).x(t) + c(t) = 0$.

Theorème

Soit $x \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$.

$$x \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \text{ solution de } \left\{ \begin{array}{c} x' = y \\ y' = -b(t).x(t) - a(t).y(t) - c(t) \end{array} \right.$$

Theorème de Cauchy

Soient $t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{K}, m_0 \in \mathbb{K}$.
Alors l'équation $(E) : x'' + a(t)x' + b(t)x + c(t)$ admet une unique solution telle que $\left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = m_0 \end{array} \right.$.

2 Coefficients constants

$$(E) : a.x'' + b.x' + c.x = 0$$

Définition

Equation caractéristique : $a.X^2 + b.X + c = 0$, $\Delta = b^2 - 4.a.c$.

Cas complexe

- $\Delta \neq 0$
  $\left\{ \begin{array}{l} x_1 : t \mapsto \exp(r_1.t) \\ x_2 : t \mapsto \exp(r_2.t) \end{array} \right.$ constitue un système fondamental.
- $\Delta = 0$
  $\left\{ \begin{array}{l} x_1 : t \mapsto \exp(r.t) \\ x_2 : t \mapsto t.\exp(r.t) \end{array} \right.$ constitue un système fondamental.

Cas Réel

- $\Delta > 0$
  $\left\{ \begin{array}{l} x_1 : t \mapsto \exp(r_1.t) \\ x_2 : t \mapsto \exp(r_2.t) \end{array} \right.$ constitue un système fondamental.
- $\Delta = 0$
  $\left\{ \begin{array}{l} x_1 : t \mapsto \exp(r.t) \\ x_2 : t \mapsto t.\exp(r.t) \end{array} \right.$ constitue un système fondamental.

- $\Delta < 0$
  $r_1 = \alpha + \imath.\beta$ et $r_2 = \alpha - \imath.\beta$
  $\begin{cases} x_1 : t \mapsto \exp(\alpha.t).\cos(\beta.t) \\ x_2 : t \mapsto \exp(\alpha.t).\sin(\beta.t) \end{cases}$ constitue un système fondamental.

3 Cas général

$$(H) : x''(t) + a(t).x'(t) + b(t).x(t) = 0$$

$$(\mathscr{H}) : \begin{cases} x' = y \\ y' = -b(t).x - a(t).y \end{cases}$$

Theorème
L'ensemble S_H des solutions de l'équation homogène (H) est un SEV de dimension 2 de l'EV $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$.

Définition
Une base $(\mathscr{U}, \mathscr{V})$ de l'EV S_H est appelé un système fondamental de solutions de (H).

Theorème
Pour que $(\mathscr{U}, \mathscr{V})$ soit un système fondamentale de solutions de (H), il faut et il suffit que $\mathscr{U} = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}$ forment un système fondamental de $(\mathscr{H})$.

Theorème
Soient u et v deux solutions de (H) alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (u, v) est un système fondamental de solutions de (H).
- $\exists t_0 \in I, \begin{vmatrix} u(t_0) & v(t_0) \\ u'(t_0) & v'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$
- $\forall t \in I, \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix} \neq 0$

Définition
Le déterminant $W(t) = \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}$ est appelé le wronskien du système fondamental de solutions (u, v).

Theorème
Le wronskien vérifie : $W'(t) = Tr(A).W(t)$.

Theorème
L'ensemble des solutions de (E) est un plan affine de direction S_H.

Theorème
Soit (U, V) un système fondamental de solutions de (H).
Les solutions de E sont toutes les fonctions de la forme $\lambda.u + \mu.v$ où λ et $\mu \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ vérifient :

$$\lambda'.U + \mu'.V = \begin{pmatrix} 0 \\ -c(t) \end{pmatrix}$$

Cas particulier : Euler

On suppose connue une solution h de (H) qui ne s'annule pas sur I.
La méthode consiste à faire le changement de fonction inconnue : $x = h.y$.

$$x \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow u = y' \text{solution de } u.(2h' + a.h) + u'.h + c = 0$$

Notions sur les équations différentielles non linéaires

1 Définitions

Définition
Equation non linéaire : $x' = f(x,t)$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^2$ et où $x : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

Définition
Une solution $x : I \to \mathbb{R}$ de (E) est dite maximale si on ne peut pas la prolonger en une solution de (E) définie sur un intervalle strictement plus grand que I.

Theorème de Cauchy
Hypothèses :
- $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert.
- $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{O}, \mathbb{R})$
- $(E) : x' = f(x,t)$
- $(x_0, t_0) \in \mathscr{O}$.

Alors : il existe une solution maximale et une seule $x : I \to \mathbb{R}$ de (E) telle que $x(t_0) = x_0$. I est un intervalle ouvert.

2 Systèmes

Définition

$$\begin{cases} x' = f(x,y,t) \\ y' = g(x,y,t) \end{cases}$$

où f et $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{O}, \mathbb{R})$ avec $\mathscr{O} \in \mathbb{R}^3$ ouvert.

Définition
Un système est autonome si $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$.

Définition
Une solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$ est dite maximale si elle ne peut pas être prolongée en une solution définie sur un intervalle plus grand que I.

Theorème
Toute solution peut-être prolongée en une solution maximale.

Theorème de Cauchy
Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_0, t_0) \in \mathscr{O}$.
Alors : il existe une et une seule solution maximale du système vérifiant les conditions initiales

$\left\{ \begin{array}{l} x'(t_0) = x_0 \\ y'(t_0) = y_0 \end{array} \right.$.
Cette solution est définie sur un intervalle I contenant t_0.

Theorème

Hypothèses :

- (x, y) une solution maximale de $(\mathscr{S})$.
- $a \in \mathbb{R}$.
- $x_1 = x(t + a)$
- $y_1 = y(t + a)$

Alors : $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ est solution de $(\mathscr{S})$.

3 Courbes intégrales

Définition

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$ est une solution maximale de $(\mathscr{S})$, la courbe définie par la paramétrisation $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est appelé courbe intégrale du système.

Définition

Son support $\{(x(t), y(t))/t \in I\}$ est appelé une orbite du système.

Theorème

Les orbites forment une partition de l'ouvert $\mathscr{O}$ donc par chaque point $M_0(x_0, y_0)$ de $\mathscr{O}$, il passe une orbite et une seule.

Définition

La représentation graphique de l'ensemble des courbes intégrales constitue le portrait de phase.

Problèmes associés

- Cas d'une seule équation autonome : $x' = f(x)$.
- Cas d'une équation différentielle du second ordre autonome : $x'' = f(x, x')$.
- Cas d'une fonction du premier ordre non autonome : $x' = f(x, t) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x' = f(x, y) \\ y' = 1 \end{array} \right.$.

Equations à variables séparables

$$(E) : y' = a(x).b(y)$$

- On résoud l'équation $b(y) = 0$. Les fonctions constantes trouvées sont des solutions maximales sur I.
- On cherche des solutions non constantes : $\dfrac{y'}{b(y)} = a(x)$.
- Soient : B une primitive de $\dfrac{1}{b}$ et A une primitive de a sur I.
- $B(y) = A(x) + C$

Equation homogène

$$(E) : y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

On fait le changement de fonction inconnue $t = \frac{y}{x}$.

Suites réelles

Définition

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array} \right.$$

Theorème

$(\mathscr{S}, +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

Définition

Suite majorée : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
Suite minorée : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.
Suite bornée : majorée et minorée.

Définition

Suite extraite de (x_n).
Toute suite (y_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N} y_n = x_{\varphi(n)}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante.

Définition

(u_n) convergente si

$$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$$

Theorème

Toute suite extraite d'une suite convergent vers l converge vers l.

Définition

(x_n) et (y_n) sont adjacentes si :

- (x_n) est croissante.
- (y_n) est décroissante.
- $\lim_{n \to +\infty} |x_n - y_n| = 0$.

Theorème

Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

Theorème

des segments emboîtés Soit (I_n) une suite de segments de $\mathbb{R}$.

Hypothèses :

- $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$.
- $\lim_{n \to +\infty} \delta(I_n) = 0$, avec δ le diamètre d'un segment.

Alors : : $\bigcap I_n = \{l\}$.

Theorème

de Bolzano-Weierstrass De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergent.

Théorèmes d'approximation

1 Introduction

Theorème
L'ensemble $\mathscr{CM}([a;b], E)$ est une sev de $\mathscr{F}([a;b], E)$.

Définition
$f : [a;b] \to E$ est dite en escalier s'il esiste une subdivision $\sigma = a = c_0 < \ldots < c_n = b$ telle que : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall x \in]c_{i-1}; c_i[, f(x) = cst$.

Définition
$f : [a;b] \to E$ est dite Continue Affine par Morceaux, s'il existe une subdivision $\sigma = a = c_0 < \ldots < c_n = b$ telle que : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, sur $]x_{i-1}; x_i[$, f affine.

Theorème
Soit $\sigma = a = c_0 < \ldots < c_n = b$ une subdivision de $[a;b]$.
Alors : une fonction continue affine par morceaux est complètement déterminée par : $f(c_0), \ldots, f(c_n)$.

Theorème
L'ensemble $\mathscr{A}([a;b], E)$ des fonctions continues affines par morceaux est une SEV de $\mathscr{C}([a;b], E)$.

2 Théorèmes d'approximation

Theorème
$f : [a;b] \to E$ une fonction continue par morceaux.
Alors : $\exists(f_n)$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a;b]$.

Theorème
L'ensemble des fonctions en escalier est partout dense dans $\mathscr{CM}([a;b], E)$.

Theorème
$f : [a;b] \to E$ une fonction continue.
Alors : $\exists(f_n)$ de fonction continues affines par morceaux qui converge uniformément vers f.

3 Théorème de Weierstrass

Theorème
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{K}$, une fonction continue. Alors : $\exists(P_n) \in \mathbb{K}[X]$ qui converge uniformément vers f sur $[a;b]$.

Définition

On appelle polynôme trigonométrique toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{a_k \cos(kx)+b_k \sin(kx)}^{n}$$

où a_k et b_k sont des nombres complexes fixés.

f s'écrit sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} -nc_k \exp(ikx)$.

Si $c_n \neq 0$ ou $c_{-n} \neq 0$, alors $degf = n$.

Theorème

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, $2\pi -$ périodique .

Alors : il existe une suite (f_n) de polynômes trigonométriques qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Séries

1 Généralités

Définition

- E un EVN de dimension finie
- (u_n) une suite d'éléments de E.
- La série de terme general u_n est la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ definie par :

$$\forall n \in N, S_n = \sum_{n\geq 0} n = 0nu_k$$

Définition

- La série de u_n est dite convergente lorsque la suite des sommes partielles est convergente.
- On note $\sum_{n=0}^{+\infty} n = 0u_n$ la limite de la suite $S_n = \sum_{n\geq 0} n = 0nu_n$.
- Dans le cas contraire, la série est divergente.

Theorème

L'ensemble des séries convergentes d'éléments de E est un SEV de toutes les suites d'éléments de E.

Theorème

Soit $\sum_{n\geq 0} n \geq 0u_n$ une série convergente, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Définition

Reste à l'ordre n d'une série convergente: $R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} k = n + 1u_n$.

Theorème

Le reste à l'ordre n d'une série convergentetend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Theorème

- E un EV de dimension p
- $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
- $u_n = \sum_{n\geq 0} i = 1pu_{i,n}e_i$

$$\sum_{n\geq 0} n \geq 0convergente \Leftrightarrow \forall i \in N_n, \sum_{n\geq 0} n \geq 0u_{i,n}convergente$$

Dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} n \geq 0u_n = \sum_{n\geq 0} i = 1p\sum_{n=0}^{+\infty} n \geq 0i_{i,n}$.

2 Séries à termes réels positifs

Theorème
$\sum_{n\geq 0} n \geq 0 convergente \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq M$

Theorème : Comparaison logarithmique
Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles à termes positifs.
Si $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$,
Alors $\sum_{n\geq 0} b_n$ convergente$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ convergente.

Theorème
Soient $\sum_{n\geq 0} a_n$, $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux sumies à termes réels positifs.

$a_n = O(b_n)$

- $\sum_{n\geq 0} b_n convergente \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n convergente$ et $R_n(a) = O(R_n(b))$.
- $\sum_{n\geq 0} a_n divergente \Rightarrow \sum_{n\geq 0} b_n divergente$ et $S_n(a) = O(S_n(b))$.

$a_n = o(b_n)$

- $\sum_{n\geq 0} b_n convergente \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n convergente$ et $R_n(a) = o(R_n(b))$.
- $\sum_{n\geq 0} a_n divergente \Rightarrow \sum_{n\geq 0} b_n divergente$ et $S_n(a) = o(S_n(b))$.

$a_n \sim b_n$

- $\sum_{n\geq 0} b_n convergente \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n convergente$ et $R_n(a) \sim (R_n(b))$.
- $\sum_{n\geq 0} b_n divergente \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n divergente$ et $S_n(a) \sim (S_n(b))$.

Règle de d'Alembert
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série convergentede terme general positif, telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

- Si $l < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ convergente.
- Si $l > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ divergente.

3 Séries alternées

Définition
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels. On dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est alternée si :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n a_n$ où la suite (a_n) est de signe constant.

Theorème
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série alternée telle que :

- $(|u_n|)$ décroit.
- $\lim_{n\to+\infty}(|u_n|) = 0$.

Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

4 Comparaison avec une intégrale

Theorème

Soit $f : \mathbb{R}_+ \Rightarrow \mathbb{R}_+$, continue et décroissante.
f intégrable sur $\mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} f(n) convergente$

Theorème

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha} convergente \Leftrightarrow \alpha > 1$$

5 Série d'éléments d'un EVN

Critère de Cauchy

$\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy lorsque (S_n) est une suite de Cauchy.

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}^*, \|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}\| \leq \epsilon$$

Theorème

Dans un EVN de dimension finie :
$\sum_{n\geq 0} u_n convergente \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy.

Définition

$\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite Absolument convergentelorsque ser $\|u_n\|$ est convergente.

Theorème

Dans un EVN de dimension finie :

$$\sum_{n\geq 0} u_n Absolumentconvergente \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n convergenteet \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

Theorème

Dans un EVN de dimension finie :

$$\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \|x^n\| \leq \|x\|^n$$

Définition

On appelle série géométrique de raison a : $\sum_{n\geq 0} a^n$.

Theorème

$$\|a\| < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n convergente$$

Theorème

$$\|a\| < 1 \Rightarrow \begin{cases} (1_E - a) est inversible dans E \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = (1_E - a)^{-1} \end{cases}$$

Theorème

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!} est Absolument convergente$$

6 Suites sommables

Définition
(a_n) est sommable s'il existe M tel que $\sum_{n\geq 0} j \in J a_j \leq M$ pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$.

Theorème
$(a_n) \geq 0$ sommable $\Leftrightarrow \exists$ une suite exhaustive de parties finies telles que $S_n = \sum_{n\geq 0} j \in J a_j$ soit bornée.

Theorème
$(a_n) = \geq 0$ sommable $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n convergente$

Définition
$(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable si $(|u_n|)$ est sommable.

Theorème
$(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n convergente.$

Theorème
Soit (u_n) sommable et (J_n) une suite exhaustive de parties finies de $\mathbb{N}$.
Alors $S_{J_n} = \sum_{n\geq 0} j \in J_n u_j convergente$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathscr{S}_{j_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$

Theorème
Soit $f Continue par Morceaux$, décroissante et à valeurs positives.
On pose $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$.
On a alors : $\sum_{n\geq 0} w_n$ convergente.

Familles sommables

1 Ensembles dénombrables

Theorème
Soit P une partie infinie de $\mathbb{N}$, alors il existe une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$sur P.

Définition
Un ensemble I est dénombrable s'il est vide ou s'il est équitpotent à une partie P de $\mathbb{N}$.

Theorème
$\mathbb{N}\times$ $\mathbb{N}$est dénombrable.
Proprités

- Un sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
- Un ensemble équipotent à une ensemble dénombrable est dénombrable.
- Le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable.
- La réunion de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

Theorème
I dénombrable $\Leftrightarrow \exists(J_n)$ une suite exhaustive de partie finie de I telle que $I = \bigcup J_n$.

Theorème
$\mathbb{Q}$est un ensemble dénombrable.

2 Famille dénombrable de $\mathbb{R}_+$

Définition
Une famille dénombrable $(x_i) \in \mathbb{R}_+$ est dite sommable si pour toute partie finie J de I $\exists M \in \mathbb{R}, \sum_{n\geq 0} i \in Jx_i \leq M$.

Theorème
Soit $(x_i, i \in I =$ une famille dénombrable de $\mathbb{R}_+$.
$(x_i) sommable \Leftrightarrow \exists(J_n)$ une suite exaustive de partie finies de I telle que $S_n = \sum_{n\geq 0} i \in J_n x_i$ soit majorée.

3 Familles sommables sur $\mathbb{C}$

Définition
$(x_i)_{i\in I}$ est une famille sommable si $(|x_i|)$ est commable.

Theorème
Soient (x_i) une famille sommable et (J_n) une suite exhaustive de parties finies de I.
La limite de (S_n) ne dépend pas de (J_n).

4 Suites doubles sommables

Définition
Une suite double sommable est une suite double telle que $S_n = \sum_{n\geq 0} p+q \leq n u_{p,q}$ est majorée.

Theorème
Soit $u_{p,q})$ une suite double sur $\mathbb{R}_+$.
$(u_{p,q})$ sommable $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} x_k$ convergenteavec $x_k = \sum_{n\geq 0} p+q = k u_{p,q}$

On a alors : $S = \sum_{n\geq 0} \mathbb{N}^2 u_{p,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_k$.

Theorème
Les trois propositions suivantes sont équivalentes.

- $(u_{p,q})$ sommable.
- $\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n\geq 0} q \geq 0$ est convergenteet $\sum_{n\geq 0} p \geq 0 U_p$ convergenteavec $U_p = \sum_{n=0}^{+\infty} q = 0 u_{p,q}$
- $\forall q \in \mathbb{N}, \sum_{n\geq 0} p \geq 0$ est convergenteet $\sum_{n\geq 0} q \geq 0 U_q$ convergenteavec $U_q = \sum_{n=0}^{+\infty} p = 0 u_{p,q}$

Définition
$(u_{p,q}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable si $(|u_{p,q}|)$ est sommable.

5 Produit de Cauchy

Suites de fonctions

1 Définitions

Définition
(f_n) converge simplementsur D si $\forall x \in D, (f_n(x))$ converge.

Définition
(f_n) converge uniformementsur D si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D, n \geq N \Rightarrow \|f(x) - f_n(x)\| \leq \epsilon$.

Theorème
(f_n) converge uniformementvers f $\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} ||f - f_n||_\infty = 0$.

Règle 1
(f_n) converge uniformementvers $\tilde{0} \Leftrightarrow \exists(\epsilon_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}, \lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$ et à partir d'un certain rang$||f_n||_\infty \leq \epsilon_n$.

Rèble 2
$\exists(x_n) \in D^{\mathbb{N}}, \lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) \neq 0 \Rightarrow (f_n)$ ne converge pas vers $\tilde{0}$.

Theorème
L'ensemble des suites qui converge simplementest un EV .

2 Limite uniforme et continuité

Theorème
de la double limite Soient :

- $(f_n) : D \to F$, converge uniformementvers f sur D.
- $a \in \overline{D}$.

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x\to a} f_n(x) = l_n$.
Alors :

- (l_n) convergente
- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to+\infty} l_n$

Theorème
$(f_n) \in \mathscr{C}^0(D; F)$, qui converge uniformementvers f sur D, alors $f \in \mathscr{C}^0(D; F)$.

Theorème
(f_n) converge uniformementsur tout compact $A \subset D$, alors (f_n) converge simplementsur D.

3 Intégration et dérivation

Theorème
Hypothèses :
- $\forall n \in \mathbb{N}, (f_n) \in \mathscr{C}^0([a;b], \mathbb{K})$
- $(f_n) convergeuniformementversfsur[a;b]$

Alors :
- $f \in \mathscr{C}^0([a;b], \mathbb{K})$
- $\lim_{n\to+\infty} \int_{[a;b]} f_n = \int_{[a;b]} f$

Theorème
de primitivation
Hypothèses :
- I un intervalle de $\mathbb{R}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}(f_n) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$.
- (f_n) converge simplementvers f sur I.
- (f_n) converge uniformementsur tout segment inclus dans I.

Soit $F_n \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \end{cases}$.
Alors :
- (F_n) converge simplementvers $F = \int_{x^0}^{x} f(t)dt$.
- (F_n) converge uniformementsur tout segment inclu dans I.

Theorème
de dérivation 1
Hypothèses :
- I un intervalle de $\mathbb{R}$.
- $qqsn, f_n \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$.
- $\exists x_0 \in I, \forall n \in \mathbb{N} f_n(x_0) = 0$.
- (f'_n) converge simplementsur I vers g.
- (fn') converge uniformementsur tout segment de I.

Alors :
- (f_n) converge simplementvers f sur I.
- (f_n) converge uniformementvers f sur tout segment de I.
- $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$.
- $f' = \lim_{n\to+\infty} f'_n$

Theorème
de dérivation 2
Hypothèses :
- I un intervalle de $\mathbb{R}$.
- $\forall n \in \mathbb{N} f_n \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$.
- (f_n) converge simplementsur I.
- (f'_n) converge simplementsur I.
- (f'_n) converge uniformementsur tout segment de I.

Alors :
- (f_n) converge uniformementvers f sur tout segment de I.
- $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$.
- $f' = \lim_{n\to+\infty} f'_n$

Séries de fonctions

1 Convergence

Définition
Soit $(u_n) : D \to F$.

On appelle série de fonction de terme general (u_n) la suite de fonction $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Définition
$\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplementsi (S_n) converge simplement.
$\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformementsi (S_n) converge uniformement.

Theorème
Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ qui converge simplementsur D.
$\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformement$\Leftrightarrow$ (R_n) converge uniformement.

Définition

$$\sum_{n\geq 0} f_n convergenormalementsi \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, f_n \,\text{bornée sur} D \\ \sum_{n\geq 0} \|u_n\| \text{ est convergente} \end{cases}$$

Theorème

$$\sum_{n\geq 0} f_n convergenormalement \Rightarrow \sum_{n\geq 0} f_n convergeuniformement$$

Critère de converge normalement

$$\sum_{n\geq 0} f_n convergenormalement \Leftrightarrow \exists(\alpha_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}, \begin{cases} \forall x \in D, \|u_n(x)\| < \alpha_n \\ \sum_{n\geq 0} \alpha_n convergente \end{cases}$$

Theorème
Hypothèses :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathscr{C}^0(D)$
- $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformementsur D

Alors : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur D.

Theorème

Hypothèses :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathscr{C}^0(D)$
- $\sum_{n\geq 0} f_n convergeuniformement$ sur tout compact $A \subset D$.

Alors :

- $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplementsur D.
- $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur D.

Theorème

Hypothèses :

- $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformementsur D
- $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x\to a} f_n = l_n$

Alors :

- $\sum_{n\geq 0} l_n$ convergentevers L.
- $\lim_{x\to a} S = L$.

2 Intégration, dérivation

Theorème d'intégration

Hypothèses :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathscr{C}^0([a;b])$.
- $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformementvers f sur $[a;b]$.

Alors :

- $S \in \mathscr{C}^0([a;b])$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$

Theorème de primitivation

Hypothèses :

- I un intervalle de $\mathbb{R}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathscr{C}^0(I)$ A VERIFIER
- $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplementsur I.
- $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformementsur tout segment de I

Soit $x_0 \in I$, on pose $F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n$.

Alors :

- $\sum_{n\geq 0} F_n$ converge simplementsur I.
- $\sum_{n\geq 0} F_n$ converge uniformementsur tout segment de I.

- $\forall x \in I, \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n = \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$

Theorème de dérivation

Hypothèses :

- I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$
- $\exists x_0 \in I, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x_0) = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathscr{C}^1(I)$
- $\sum_{n \geq 0} f_n'$ converge simplementsur I.
- $\sum_{n \geq 0} f_n'$ converge uniformementsur tout segment de I

Alors :

- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplementsur I.
- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformementsur tout segment de I
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathscr{C}^1(I)$
- $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (f_n)'$

Theorème de dérivation 2

Hypothèses :

- I un intervalle de $\mathbb{R}$.
- $qqsn, f_n \in \mathscr{C}^1(I)$
- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplementsur I.
- $\sum_{n \geq 0} f_n'$ converge simplementsur I.
- $\sum_{n \geq 0} f_n'$ converge uniformementsur tout segment de I.

Alors :

- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformementsur tout segment de I.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathscr{C}^1(I)$
- $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (f_n)'$

3 Convergence Monotone-Dominée

Theorème

Hypothèses :

- I un intervalle de $\mathbb{R}$.
- $\forall n \in \mathbb{N} f_n \in ContinueparMorceaux(I)$.
- (f_n) croissante
- (f_n) converge simplementsur vers $f \in ContinueparMorceaux$ sur I

Alors : f intégrable sur $I \Leftrightarrow \left(\int_I f_n\right)$ majorée.

Dans ce cas : $\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Theorème

Hypothèses :

- I un intervalle de $\mathbb{R}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f_n(x) \geq 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in ContinueparMorceaux(I)$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ intégrable sur I.
- $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplementsur vers $S \in ContinueparMorceaux$ sur I

Alors S intégrable sur $I \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} \int_I f_n$ converge.

On a alors : $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Développement en série entière

1 Théorie

Définition

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{NN}$.
On apelle série entière, la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 0} a_n * z^n$.

Theorème

$$I = \left\{ r \in \mathbb{R}_+, \sum_{n\geq 0} |a_n|\, r^n \text{converge} \right\}$$

I est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0.

Définition

$SupI$ est appelé rayon de convergence de la série entière : $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.

Définition

$D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ est appelé disque ouvert de convergence.

Lemme d'Abel

$\exists r_0 > 0, (|a_n|\, r_0^n)$ bornée $\Rightarrow [0; r_0[\subset I$.

Theorème

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$.

- si $|z| < R, \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.
- si $|z| > R, \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge.

Theorème

$$\exists z_0 \in \mathbb{C}, \sum_{n\geq 0} a_n z_0^n \text{converge} \Rightarrow R \geq |z_0|$$

$$\exists z_0 \in \mathbb{C}, \sum_{n\geq 0} a_n z_0^n \text{diverge} \Rightarrow R < |z_0|$$

Theorème

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \Rightarrow R = \frac{1}{l}$$

Opérations algébriques

La somme de deux séries entières est une série entière de rayon de convergence $R \geq \inf(R_a, R_b)$.

Définition
On appelle produit de Cauchy de A et B, la série entière $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Son rayon de convergence R vérifie : $R \geq \inf(R_a, R_b)$.

Theorème
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Sa somme est continue sur $D(O, R)$.

2 Série entière d'une variable réelle

Lemme
$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} (n+1)a_{n+1} z^n$ ont le même rayon de convergence.

Theorème
$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ re rayon de convergence $R > 0$.

Alors :

- $S \in \mathscr{C}^1([-R; +R])$
- $\forall x \in]-R; +R[, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n = 1 n a_n x^{n-1}$

Theorème
$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ re rayon de convergence $R > 0$.

Alors :

- $S \in \mathscr{C}^\infty(]-R; +R[)$
- $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \;]-R; +R[, S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$

3 Développement en série entière

Définition
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ avec I un intervalle qui est un voisinage de 0.
On dit que f est développable en série entière si

- $exists \alpha > 0$ avec $]-\alpha; \alpha[\subset I$.
- Une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq \alpha$ telle que $\forall x \in]-\alpha; \alpha[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Propriétés :

- L'ensemble des fonctions développables en série entière sur $]-\alpha; \alpha[$ est une $\mathbb{C}$-algèbre.
- Il y a unicité du développement en série entière.
- f développable en série entière $\Rightarrow f \in \mathscr{C}^\infty(]-\alpha, \alpha[\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}$ est développable en série entière.
- f développable en série entière $\Rightarrow \int f$ développable en série entière.
- f développable en série entière $\Rightarrow f$ admet un DL_n.

4 Développement des fonctions usuelles

Intervalle de convergence	DSE	$=$
$\mathbb{R}$	$\exp x$	$=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$
$]-1;+1[$		$=$
$frac11-x$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$	$=$
$]-1;+1[$	$\ln(1-x)$	$=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-1}{n+1}x^{n+1}$
$]-1;+1[$	$(1+x)^\alpha$	$=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}.x^n$
$]-1;+1[$	$\dfrac{1}{(1-x)^p}$	$=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}C_{n+p-1}^{p-1}.x^n$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n+1}$
$]-1;+1[$	$\arctan(x)$	$=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Utilisation de la formule de Taylor-Young

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k+\frac{1}{n!}.\int_0^x(x-t)^n.f^{(n+1)}(t).dt$$

S'il existe $\alpha>0$ fixé tel que :

$$\forall x\in]-\alpha;+\alpha[,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n.f^{(n+1)}(t).dt=0$$

Alors : $\forall x\in]-\alpha;+\alpha[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.x^n$ avec $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Séries de Fourier

1 Série trigonométrique

Définition
Une série trigonométrique est une série de fonctions de la fomre $\sum_{n\geq 0} u_n$ où :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & c_n.\exp(\imath.n.x) + c_{-n}.\exp(-\imath.n.x) \end{array} \right.$
- $u_0(x) = c_0$.

On peut définir u_n comme :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_n.\cos(n.x) + b_n.\sin(n.x) \end{array} \right.$.
- $u_0 = \dfrac{a_0}{2}$.

Theorème
Soit $c_0 + \sum_{n\geq 0} (c_n.\exp(\imath.n.x) + c_{-n}.\exp(-\imath.n.x))$ une série trigonométrique. Si les séries numériques $\sum_{n\geq 1} c_n$ et $\sum_{n\geq 1} c_{-n}$ sont absolument convergent, alors la série trigonométrique converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2 Série de Fourier d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $2\pi-$périodique et $Continue par Morceaux$

Définition
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, 2\pi -$ périodique et Continue par Morceauxsur $\mathbb{R}$.

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \text{on pose } c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t).\exp(-\imath.n.t).dt$$

La série trigonométrique $c_0 + \sum_{n\geq 1} (c_n.\exp(\imath.n.x) + c_{-n}.\exp(-\imath.n.x))$ est appelée série de Fourier de f et les coefficients sont appelés les coefficients de Fourier de f.
On note $\hat{f}$ la famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Propriétés :

- On peut remplacer l'intervalle d'intégration par tout intervalle d'amplitude 2π.
- L'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire.
- Si f est à valeurs réelles : $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = c_{-n}$.
- Si f est paire : $c_n = c_{-n}$.
- Si f est impaire : $c_n = -c_{-n}$.

Cas de a_n et b_n

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t).\cos(n.t).dt \qquad ; \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t).\sin(n.t).dt$$

Propriétés :

- Si f est à coefficients réels, a_n et b_n sont réels.
- Si f est paire, on a $b_n = 0$ et $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t).\cos(n.t).dt$
- Si f est impaire, on a $a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t).\sin(n.t).dt$

Effet d'une translation
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, 2\pi-$ périodique et Continue par Morceaux.
Soit $a \in \mathbb{R}$, on définie $f_a \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f(t+a) \end{array} \right.$.

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f_a) = \exp(\imath.n.a).c_n(f)$$

Theorème
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, 2\pi-$ périodique et Continue par Morceaux.
Alors $\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Lemme de Lesbegue
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ une fonction Continue par Morceaux.
Alors : $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t).\exp(\imath.n.t).dt = 0$.

Theorème
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, 2\pi-$ périodique , de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ par morceaux.

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n\left(f^{(k+1)}\right) = (\imath.n)^{k+1}.c_n(f)$$

Theorème de Dirichlet
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dpp de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Alors : la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est la fonction S définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \frac{1}{2}.\left(f(x^-) + f(x^+)\right)$$

3 Convergence en moyenne quadratique

Theorème
Soit $\mathscr{C}_{2\pi}$ l'EV des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, 2\pi-$ périodique et continues.

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi}.\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}.g(t).dt$$

est un produit scalaire.
Muni de ce produit scalaire, $\mathscr{C}_{2\pi}$ est un espace préhilbertien complexe.

Theorème
$\forall n \in \mathbb{N}$, on définit : $e_n : x \mapsto \exp(\imath.n.x)$.
La famille $(e_n, n \in \mathbb{Z})$ est orthonormale.

Theorème
Si $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$, sa projection sur F_n est la somme partielle à l'ordre n de la série de Fourier de f.

Theorème

La famille $c_n(f)$ est carré sommable. De plus on a l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 .dt$$

Formule de Parceval

L'inégalité de Bessel est une égalité :

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 .dt$$

$$\frac{1}{2}. |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 .dt$$

Theorème

La formule de Parceval est encore vraie pour toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $2\pi-$périodique et Continue par Morceaux.

Theorème

Notons l_2 l'EV des familles indexées par $\mathbb{Z}$ de nombres complexes, de carré sommable.
On munit l_2 d'un produit scalaire : $\forall z, z' \in l_2 :< z, z' >= \sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{z_n}.z'_n$.
Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$.
$f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire de $\mathscr{C}_{2\pi}$ dans l_2 qui conserve la norme et donc le produit scalaire.
D'où : $\forall f, g \in \mathscr{C}_{2\pi}, \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}.g(t).dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)} c_n(g)$.

4 Théorème de convergence normale

Theorème

Dans le cas où f est continue,$2\pi-$ périodique et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Theorème

Soient $f, g \in \mathscr{C}_{2\pi}$.
Si f et g ont les mêmes coefficients de Fourier, alors $f = g$.

Theorème

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille sommable de nombres complexes.
Alors : la série de foinction $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ avec $\begin{cases} u_0 = c_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = c_n. \exp(\imath.n.x) + c_{-n}. \exp(-i.n.x) \end{cases}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somm est une fonction $2\pi-$ périodique et continue.
On pose $S(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} (c_n. \exp(\imath.n.x) + c_{-n}. \exp(-\imath.n.x))$.
Les coefficiens de Fourier de S sont les c_n.

5 Cas des fonctions périodiques

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, Continue par Morceauxet $T-$périodique.
On pose $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t).\exp(\imath.n.\omega.t).dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).\cos(n.\omega.t).dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).\sin(n.\omega.t).dt$$

Theorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $T-$périodique et $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors : la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est la fonction S définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \frac{1}{2}.\left(f(x^-) + f(x^+)\right)$$

Formule de Parceval

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $T-$périodique et Continue par Morceaux.
La famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est de carrée sommable :

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2.dt$$

$$\frac{1}{2}.|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2.dt$$

Theorème de convergence normale

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, $T-$périodique et $\mathscr{C}^1$ par morceaux.
Alors : la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$, et sa somme est égale à la fonction f.