Table des matières

Première partie

Mécanique

Chapitre 1

Cinématique

1.1 Outils de dérivation vectorielle

Dérivée d'un vecteur unitaire

$$\left(\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right)_{R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right)_{R_2} + \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{u}$$

Composition des vecteurs rotation

$$\overrightarrow{\Omega}_n 1 = \overrightarrow{\Omega}_n n - 1 + \ldots + \overrightarrow{\Omega}_3 2 + \overrightarrow{\Omega}_2 1$$

Décomposition d'un vecteur rotation

$$\overrightarrow{\Omega}_0 1 = \sum_i (\dot{\alpha}_i \cdot \overrightarrow{e}_i)$$

1.2 Solides indeformables

Equiprojéctivité des vitesses

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{V_{M\in S/R}} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{V_{N\in S/R}}$$

Définition : Torseur cinématique

$$\{\mathscr{V}_{S/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_S 1 \\ \overrightarrow{V_M} S1 \end{array} \right\}_M$$

Déplacement d'un torseur

$$\overrightarrow{V_M} S1 = \overrightarrow{V_N} S1 + \overrightarrow{\Omega}_{S/1} \wedge \overrightarrow{NM}$$

Relation entre les vitesses d'un même point

$$\overrightarrow{V_M}31 = \overrightarrow{V_M}32 + \overrightarrow{V_M}21$$

Relation entre les torseurs cinématiques

$$\{\mathscr{V}_{1/n}\} = \{\mathscr{V}_{1/2}\} + \ldots + \{\mathscr{V}_{(n-1)/n}\}$$

1.3 Cinématique

- S_1 en mouvement de rotation par rapport à S_2

$$\{\mathscr{V}_{1/t}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_21 \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_1} \Rightarrow \forall P : \overrightarrow{\Omega}_21 \cdot \overrightarrow{V_P}12 = \overrightarrow{0}$$

- S_1 en mouvement de translation par rapport à S_2

$$\{\mathscr{V}_{1/2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V_P}21 \end{array} \right\}_{\forall P} \Rightarrow \forall (P,Q) \in S_2 : \overrightarrow{V_P}12 = \overrightarrow{V_Q}12$$

1.4 Mouvement plan sur plan :

- I se trouve à l'intersection des normales aux vecteurs vitesses de deux points quelconques de S_2
- Dans les mouvements plan relatifs de trois solides S_1, S_2,S_3, les trois centres instntanés de rotation I_{12},I_{23},I_{31} sont alignés
- $\overrightarrow{V_P}21 = \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{I_{12}P}$ donc la vitesse d'un point P est proportionnelle à sa distance au centre instantanné de rotation

1.5 Analyse d'une chaîne fermée de solides :

$$\overrightarrow{O_0O_1} + \ldots + \overrightarrow{O_{n-1}O_n} + \overrightarrow{O_nO_0} = \overrightarrow{0}$$

En projetant cette équation on obtient des relations sur les paramètres de liaison.

$$\{\mathscr{V}_{1/n}\} = \{\mathscr{V}_{1/2}\} + \ldots + \{\mathscr{V}_{(n-1)/n}\}$$

En projetant cette relation on obtient trois (mécanisme plan) ou six équations.

Chapitre 2

Statique

2.1 Modélisation

$$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{1\to 2} = \displaystyle\iiint_{\Sigma_2} d\overrightarrow{f}_{M_i} \\ \overrightarrow{M}_{O,1\to 2} = \displaystyle\iiint_{\Sigma_2} \overrightarrow{OM_i} \wedge d\overrightarrow{f}_{M_i} \end{array} \right\}_O$$

Avec $d\overrightarrow{f}_{M_i} = f(M_i) \cdot dv \cdot \overrightarrow{u}_{M_i}$ dans le cas des actions volumiques.

$$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{1\to 2} = \displaystyle\iint_{S} d\overrightarrow{f}_{M_i} \\ \overrightarrow{M}_{O,1\to 2} = \displaystyle\iint_{S} \overrightarrow{OM_i} \wedge d\overrightarrow{f}_{M_i} \end{array} \right\}_O$$

Avec $d\overrightarrow{f}_{M_i} = f(M_i) \cdot dS \cdot \overrightarrow{u}_{M_i}$ dans le cas des actions surfaciques.

2.2 Loi de Coulomb :

Cas où il y a mouvement relatif entre les deux solides :

$$\frac{||dT_{1\to 2}||}{||dN_{1\to 2}||} = \mu$$

μ est le facteur de frottement on note $\mu = \tan\varphi$
Cas où il n'y a pas mouvement relatif entre les deux solides :

$$\frac{||dT_{1\to 2}||}{||dN_{1\to 2}||} = \mu_0$$

μ est le facteur de frottement on note $\mu_0 = \tan\varphi_0$
En général : $\mu \simeq \mu_0$

Il est très important de retenir :

- qu'une action mécanique élémentaire située "à l'intérieur du cône de frottement" est une C.N.S. de non mouvement relatif entre deux solides

- qu'un mouvement relatif implique que l'action mécanique élémentaire au contact est située sur le cône de frottement
- donc qu'une action élémentaire mécanique ne sort jamais du cône de frottement.

2.3 Principes et théorèmes :

Principe fondamental de la statique

$$\{\mathscr{T}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}\} = 0$$

Theorème des actions réciproques

$$\{\mathscr{T}_{1\to 2}\} = -\{\mathscr{T}_{2\to 1}\}$$

Bonus

Lorsqu'un solide est soumis à deux actions mécaniques modélisables seulement par deux glisseurs, les réultantes de ces glisseurs sont opposées et colinéaires à la droite définie par les deux points où les moments sont nuls(les axes centraux des glisseurs sont confondus).

Lorsqu'un ensemble matériel, auquel sont appliquées des actions mécaniques, modélisables par trois glisseures est en équilibre, les axes centraux des trois glisseurs sont coplanaires et concourants ou parallèles.

Chapitre 3

Dynamique des solides

3.1 Principe fondamental

Définition : Torseur dynamique

$$\{\mathscr{D}_{\Sigma/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \iiint_S \overrightarrow{\Gamma_{M/R}}.dm \\ \iiint_S \vec{PM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M/R}}.dm \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{l} M_\Sigma.\overrightarrow{\Gamma_{G_{\Sigma/R}}} \\ \vec{\delta}_{P,\Sigma/R} \end{array} \right\}_P$$

Principe fondamental de la dynamique

Il existe un repère spatial temporel, dit galiléen, noté R_g, tel que, quel que soit l'ensemble matériel Σ, le torseur dynamique de Σ dans le mouvement par rapport à R_g, s'identifie à tout instant au torseur des efforts extérieurs appliqués à l'ensemble matériel Σ.

$$\forall \Sigma, \forall t, \left\{\mathscr{D}_{\Sigma/R_g}\right\} = \{\mathscr{T}_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}\}$$

3.2 Caractéristiques d'inertie des solides

Définition : Centre d'inertie

Le centre d'inertie G de Σ est le point où le moment de tout torseur associé à un champ uniforme $\vec{f}$ définit sur Σ est nul.

$$\iiint_\Sigma \vec{GM}.dm = \vec{0} \text{ et } \vec{OG} = \frac{1}{M} \iiint_\Sigma \vec{OM}.dm$$

$$m.\vec{OG} = \sum_{k=1}^{n} m_k.\vec{OG}_k \text{ et } m.\overrightarrow{\Gamma_{G/R}} = \sum_{k=1}^{n} m_k.\overrightarrow{\Gamma_{G_k/R}}$$

Theorème de Huygens

$$\mathscr{I}_{O,S} = \mathscr{I}_{G,S} + m.\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

avec a, b, c les coordonnées de G dans le repère lié au solide.

3.3 Torseur cinétique

Définition : Torseur cinétique

$$\{\mathscr{C}_{\Sigma/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \iiint_S \overrightarrow{V_{M/R}}.dm \\ \iiint_S \vec{PM} \wedge \overrightarrow{V_{M/R}}.dm \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{l} M_\Sigma.\overrightarrow{V_{G_{\Sigma/R}}} \\ \vec{\sigma}_{P,\Sigma/R} \end{array} \right\}_P$$

Theorème du moment cinétique

$$\vec{\delta}_{P,\Sigma/R} = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{P,\Sigma/R}}{dt}\right|_R + m_\Sigma.\overrightarrow{V_{P/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G_\Sigma/R}}$$

Pour un solide :

$$\vec{\sigma}_{O_S,solide/R} = \mathscr{I}_{O_S,solide}.\vec{\Omega}_{S/R} + m_S.O_S\vec{G}_S \wedge \overrightarrow{V_{O_S/R}}$$

3.4 Energie cinétique

Définition : Energie cinétique

$$\mathscr{E}_{c,\Sigma/R} = \frac{1}{2}.\iiint_\Sigma ||\overrightarrow{V_{M/R}}||^2.dm$$

Pour un solide :

$$2.\mathscr{E}_{c,solide/R} = \{\mathscr{V}_{S/R}\} * \{\mathscr{C}_{S/R}\} = m.||\overrightarrow{V_{G,S/R}}||^2 + \vec{\Omega}_{S/R}.\mathscr{I}_{G,S}.\vec{\Omega}_{S/R}$$

Si le solide possède un point fixe O par rapport à R :

$$2.\mathscr{E}_{c,S/R} = \vec{\Omega}_{S/R}.\mathscr{I}_{O,S}.\vec{\Omega}_{S/R}$$

3.5 Puissance

Définition : Puissance

$$\mathscr{P}_{R,\overline{S}\to S} = \iiint_\Sigma \overrightarrow{V_{M/R}}.\vec{df}_M$$

Pour un solide

$$\mathscr{P}_{R,\overline{S}\to S} = \{\mathscr{T}_{\overline{S}\to S}\}.\{\mathscr{V}_{S/R}\}$$

Theorème de l'énergie cinétique

$$\left(\frac{d\mathscr{E}_{c,\Sigma/R_g}}{dt}\right)_{R_g} = \mathscr{P}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma} + \mathscr{P}_{int}$$

3.6 Equilibrage d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Pour qu'un solide en rotation autour d'un axe fixe $O\vec{z}$ soit équilibré, il faut:

- Que le centre d'inertie du solide appartienne à son axe de rotation (équilibrage statique).
- que les produits d'inertie $D = \iiint y.z.dm$ et $E = \iint x.z.dm$ soient nuls (équilibrage dynamique).

Chapitre 4

Dynamique des systèmes mécaniques

Définition : Système matériel

Ensemble constitué de plusieurs solides ou de fluides que l'on souhaite étudié.
- le système n'est pas uniquement constitué de solides indeformables.
- le système matériel n'est pas figé dans une même position.

4.1 Masse d'un sytème matériel :

Masse d'un solide :

$$M(S) = \iiint_S \rho_v.dV \text{ ou } M(S) = \iint_S \rho_s.dS \text{ ou } M(S) = \int \rho_l.dL$$

Principe de la conservation de masse :

La masse ne dépend pas du temps : $\dfrac{dM_S}{dt} = 0$.

$$\overrightarrow{\varphi(t)} = \begin{cases} \text{vecteur position } \overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{V_P}SR \\ \overrightarrow{\Gamma_P}SR \end{cases}$$

$$\frac{d\int_S \overrightarrow{\varphi(t)}.dm}{dt} = \int_S \frac{d\overrightarrow{\varphi(t)}.dm}{dt} = \int_S \frac{d\overrightarrow{\varphi(t)}}{dt}.dm$$

Définition :

G le centre de gravité de S défini par : $\int_S \overrightarrow{GP}.dm = \overrightarrow{0}$

Propriétés :

- $\int_S \overrightarrow{OP}.dm = \int_S \overrightarrow{OG}.dm$
- $\int_S \overrightarrow{OP}.dm = M.\overrightarrow{OG}$
- $\int_S x_p.dm = M.x_g$

Chapitre 5

Moment d'inertie d'un solide

5.1 Définitions

Définition :

$I_A(S) = \int_S \overrightarrow{AP}^2.dm \rightarrow$ moment d'inertie polaire.
Unité : $m^2.kg$

$$I_\Delta(S) = \int (\overrightarrow{\delta} \wedge \overrightarrow{AP})^2.dm = \int_S \overrightarrow{PH}^2.dm$$

Remarque :

$$I_O(S) = \int_S ||\vec{OP}||^2.dm = \int_S (x^2 + y^2 + z^2).dm$$

$$I_{Oy}(S) = \int_S (x^2 + z^2).dm$$

$$I_O(S) = \frac{1}{2}\left(I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz}\right)$$

Theorème

Le moment d'inertie par rapport à un axe est la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires définissant cet axe.

Theorème

Le moment d'inertie polaire est la demi-somme des moments d'inertie par rapport à trois plans perpendiculaires passant par le pôle.

5.2 Théorème de Huygiens :

Theorème

Le moment d'inertie par rapport à un axe est égale au moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par G augmenté du produit de la masse par la distance des deux axes au carré.

Moment d'inertie par rapport à un axe :

Posons :

$$\overrightarrow{\delta} = \alpha.\overrightarrow{x} + \beta.\overrightarrow{y} + \gamma.vz$$
$$\overrightarrow{OP} = x.\overrightarrow{x} + y.\overrightarrow{y} + z.\overrightarrow{z}$$

On a :

$$I_\Delta(S) = \alpha^2 I_{Ox}(S) + \beta^2 I_{Oy}(S) + \gamma^2 I_{Oz}(S) - 2.\alpha.\beta.\int_S x.y.dm - 2.\alpha.\gamma.\int_S x.z.dm - 2.\beta.\gamma.\int_S y.z.dm$$

Définition : Opérateur d'inertie d'un solide

On appelle opérateur d'inertie d'un solide S pour un point O l'opérateur qui à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ fait correspondre le vecteur :

$$\mathscr{I}_O\overrightarrow{u} = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OP}.dm$$

Cet opérateur est linéaire on peut donc lui associer une matrice.

Définition : Matrice d'inertie

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} I_{Ox} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{Oy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{Oz} \end{pmatrix}$$

Définition : Trièdre principal d'inertie

On appelle trièdre principal d'inertie une trièdre dans lequel les produits d'inerties sont nuls. Dans cette base I est diagonale.

Theorème de Huygiens généralisé

$$\mathscr{I}_O\overrightarrow{u} = \mathscr{I}_G\overrightarrow{u} + M.\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OG}$$

Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque :

$$I_\Delta = \overrightarrow{\delta}.\mathscr{I}_O\overrightarrow{\delta}$$

Chapitre 6

Eléments cinétiques d'un système matériel

6.1 Définitions

Définition : Torseur cinétique

$$\{\mathscr{C}_{\Sigma/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P}_{\Sigma/R} = \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{V_{P,S/R}}.dm \\ \overrightarrow{\sigma}_{A,\Sigma/R} = \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P,S/R}}.dm \end{array} \right\}_A$$

Définition : Torseur dynamique

$$\{\mathscr{D}_{\Sigma/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{d\Sigma/R} = \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{\Gamma_{P,S/R}}.dm \\ \overrightarrow{\delta}_{A,\Sigma/R} = \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P,S/R}}.dm \end{array} \right\}_A$$

6.2 Relations

Entre résultante cinétique et résultante dynamique :

$$\overrightarrow{P}_{\Sigma/R} = M.\overrightarrow{V_{G,\Sigma/R}}$$
$$\overrightarrow{R}_{d\Sigma/R} = M.\overrightarrow{\Gamma_{G,\Sigma/R}}$$

Entre Moment cinétique et dynamique :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma}_{A,\Sigma/R}}{dt}\right)_{\mathscr{R}} + \overrightarrow{V_{A,\Sigma/R}} \wedge M.\overrightarrow{V_{G,\Sigma/R}} = \overrightarrow{\delta}_{A,\Sigma/R}$$

Cas particuliers

- Si le point A est fixe : $\overrightarrow{V_{A,\Sigma/\mathscr{R}}} = \overrightarrow{0}$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma}_{G,\Sigma/\mathscr{R}}}{dt}\right)\mathscr{R} = \overrightarrow{\delta}_{A,\Sigma/R}$$

- Si A = G :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma}_{G,\Sigma/\mathscr{R}}}{dt}\right)\mathscr{R} = \overrightarrow{\delta}_{A,\Sigma/R}$$

- Si $\overrightarrow{V_{A,\Sigma/\mathscr{R}}}//\overrightarrow{V_{G,\Sigma/\mathscr{R}}}$:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma}_{G,\Sigma/\mathscr{R}}}{dt}\right)\mathscr{R} = \overrightarrow{\delta}_{A,\Sigma/R}$$

d'où $\overrightarrow{\delta}_{A,\Sigma/\mathscr{R}} = \overrightarrow{\delta}_{G,\Sigma/\mathscr{R}} + M.\overrightarrow{\Gamma_{G,\Sigma/\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{GA}$

Définition : Energie cinétique d'un système matériel

$$T_{\Sigma/\mathscr{R}} = \frac{1}{2}.\int_{\Sigma}(\overrightarrow{V_{P,\Sigma/\mathscr{R}}})^2.dm$$

6.3 Cas des solides

Définition : Résultante Cinétique

$$\overrightarrow{P}_{S/\mathscr{R}} = M.\overrightarrow{V_{G,S/\mathscr{R}}}$$

Définition : Moment cinétique

$$\overrightarrow{\sigma}_{A,S/\mathscr{R}} = \mathscr{I}_A\overrightarrow{\Omega}_S R + M.\overrightarrow{V_{A,S/\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{GA}$$

Définition : Energie cinétique du solide

$$T_{S/R} = \frac{1}{2}\int_S \overrightarrow{V_{P,S/R}}^2.dm$$

$$T_{S/R} = \frac{1}{2}.M.\overrightarrow{V_{G,S/R}}^2 + \frac{1}{2}.\overrightarrow{\Omega}_S R.\mathscr{I}_G\overrightarrow{\Omega}_S R$$

$$T_{S/R} = \frac{1}{2}.\{\mathscr{C}_{S/R}\}\{\mathscr{V}_{S/R}\}$$

Chapitre 7

Principe fondamental de la mécanique

7.1 Enoncé

Il existe au moins un espace temps et une base de temps appelés espace galiléen tels que pour tout ensemble matériel Σ, tel que le torseur de $\Sigma/\mathscr{R}$ soit égal au torseur des efforts extérieurs appliqué à Σ.

$$\{\mathscr{D}_{\Sigma/\mathscr{R}}\} = \{\mathscr{T}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}\}$$

7.2 Théorèmes généraux de la dynamique

Theorème du centre de gravité

$$\sum \overrightarrow{F}_{\overline{\Sigma}/\Sigma} = M.\overrightarrow{\Gamma_{G,\Sigma/\mathscr{R}}}$$

Theorème du moment dynamique

$$\overrightarrow{\delta}_{A,\Sigma/\mathscr{R}} = \overrightarrow{M}_A F_{\overline{\Sigma}/\Sigma}$$

Theorème de la puissance

Cas d'un solide

$$P = \frac{dT_{S/\mathscr{R}}}{dt}$$

Cas de deux solides

$$P_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dT_{S_i/\mathscr{R}}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left\{\mathscr{T}_{ext \to S_i}\right\} . \left\{\mathscr{V}_{S_i/\mathscr{R}}\right\} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \left\{\mathscr{T}_{S_i \to S_j}\right\} . \left\{\mathscr{V}_{S_j/S_i}\right\}$$

Chapitre 8

Chaînes de solides

8.1 Définitions

Définition : Nombre cyclotomique

C'est le nombre de cycles dans un système : $\gamma = L - N + 1$.

Définition : Mobilité m dun mécanisme

C'est le nombre de relations indépendantes qui existent entre les paramètres cinématiques du mécanisme.

Définition : Mobilité utile m_u

C'est le nombre de relations indépendantes qui existent entre les paramètres cinématiques d'entrée et de sortie du mécanisme.

Définition : Mobilité interne m_i

C'est le nombre de relations indépendantes qui existent entre les paramètres cinématiques des pièces internes au mécanisme.

Définition : Dégré d'hyperstatisme h

C'est le nombre d'inconnues d'efforts de liaison dont il faudrait imposer la valeur pour pouvoir calculer les autres.

8.2 Formules de mobilité

Formule issue de la cinématique

$$h = m + 6.\gamma - I_c$$

avec γ le nombre de cycles., I_C le nombre d'inconnues cinématiques.

Formule issue de la statique

$$h = m - 6.(p-1) + I_S$$

avec p le nombre de pièces du système.

Définition : indice de mobilité

$$m - h$$

Deuxième partie

Automatisme

Chapitre 1

Systèmes logiques

Theorème de De Morgan

$$\overline{a+b} = \overline{a}.\overline{b}$$
$$\overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$$

Bonus

$$a + \overline{a}.b = a + b = b + \overline{b}.a$$

Chapitre 2

Systèmes séquentiels

2.1 Règles d'évolution d'un GRAFCET

GRAFCET : **GRA**phe **F**onctionnel de **C**ommande **E**tape/**T**ransition.

1. La situation initiale d'un GRAFCETcaractérise le comportement initial de la partie commande vis-à-vis de la partie opérative, de l'opérateur et/ou des éléments extérieurs. Elle correspond aux étapes actives au début du fonctionnement. Elle traduit généralement un comportement de repos.
2. Une transition est dite **validée** lorsque toutes les étapes immédiatement précédentes reliées à cette transition sont actives. Le franchissement d'une transition se produit :
   - lorsque la transition est VALIDEE
   - ET QUE la récéptivité associée est vraie

   Lorsque ces DEUX conditions sont réunies, la transition devient FRANCHISSABLE et est alors OBLIGATOIREMENT FRANCHIE.
3. Le franchissement d'une transition entraîne simultanément l'activation de toutes les étapes immédiatement suivantes et la désactivation de toutes les étapes immédiatement précédentes.
4. Plusieurs transitions simultanément franchissables sont simulanément franchies.
5. Si, au cours du fonctionnement, la même étape est simultanément activée et désactivée, elle reste active.

2.2 Sorties spéciales

Sortie conditionnelle : c
Sorite prenant en compte le temps : $t_1/e/t_2$ avec t_1 le temps de retard à la montée et t_2 le temps de retard à la descente. l.l.

2.3 Règles spéciales

- Le modèle GRAFCETpostule que tous les évènements externes sont pris en compte dès leur occurence et pour toutes leur incidences.

- Les occurences d'évènements extermes non corrélés sont temporellement distinctes.
- La causalité s'effectue à temps nul.
- Les temps internes et externes sont discrets
- La durée d'évolution (durée séparant l'instant où une transition est franchissable et où elle est fanchie) est aussi petite que nécessaire mais non nulle à l'echelle de temps interne.

Chapitre 3

Systèmes linéaires continus et invariants

3.1 Entrées types

Définition : Fonction existence

$$u(t) = \begin{cases} 1\text{,si } t > 0 \\ 0\text{,si } t < 0 \end{cases}$$

Définition : Echelon

Echelon simple : $e(t) = e_0.u(t)$
Echelon retardé : $e(t) = e_0.u(t - \tau)$
Essai de lâché : $e(t) = e_0.(1 - u(t))$

Définition : Rampe

La rampe de pente a est notée : $e(t) = a.t.u(t)$

Définition : Impulsion

L'impulsion d'aire A notée $A\delta(t)$ est définie par :

$$A\delta(t) = 0 \ si \ t \neq 0$$

$$\int_{-a}^{+b} A.\delta(t)dt = A \text{ avec } a > 0 \text{ et } b > 0$$

La fonction $\delta(t)$ est une impulsion de Dirac.

Relation entre les différentes entrées :

On peut considérer qu'une rampe est l'intégrale d'un échelon et qu'une impulsion est la dérivée d'un échelon.

3.2 Transformée de Laplace

$$F(p) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-pt}.f(t)dt$$
$$F(p) = \mathscr{L}(f(t)) \ et \ f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(p))$$

Propriétés :

- Linéarité
- Dérivation : $\mathscr{L}(f'(t)) = p.\mathscr{L}(f(t)) - f(0^-)$
- Intégration : $\mathscr{L}(\int_{0^-}^{+\infty} f(t)dt) = \frac{F(p)}{p}$

Theorème de la valeur initiale et de la valeur finale

$$\lim_{t\to 0} = \lim_{p\to\infty} p.F(p)$$
$$\lim_{t\to\infty} = \lim_{p\to 0} p.F(p)$$

Theorème du retard

$$\mathscr{L}(f(t-\tau).u(t-\tau)) = e^{-\tau.p}.\mathscr{L}(f(t).u(t))$$

3.3 Schémas blocs :

Boucle fermée :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\text{Chaîne d'action}}{1 + FTBO}$$

3.4 Système du premier ordre :

Equation différentielle

$$\tau.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)$$

avec $\tau > 0$ *et* $K > 0$.

Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}$$

Réponses à un échelon

$$S(p) = \frac{K.e_0}{p} - \frac{\tau.K.e_0}{1+\tau.p}$$
$$s(t) = K.e_0.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Tangente à l'origine : $\tan g = \dfrac{K.t}{\tau}$ elle coupe l'asymtpote finale en $t = \tau$.
Allure de la réponse : pour $t = 3.\tau$: $s(t) = 0,95.K$
Valeur finale : $t \to \infty \Rightarrow s(t) \to K$
Erreur de position : $e(\infty) = e_0.(1 - K)$

Réponse à une rampe

$$S(p) = K.a.(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1+\tau.p})$$
$$s(t) = K.a.(t - \tau + \tau.e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Tangente à l'origine : horizontale.
Asymptote finale : $y = K.a.(t - \tau)$ pour K = 1 elle est parallèle à l'entrée retardée de τ.
Erreur : $e(\infty) = a.\tau$

Réponse à une impulsion

$$S(p) = \frac{K.A}{1+\tau.p}$$
$$s(t) = \frac{K.A}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Ordonnée à l'origine : $s(t=0) = \frac{K.A}{\tau}$
Tangente à l'origine : $\tan g = -\dfrac{K.a}{\tau^2} + \dfrac{K.a}{\tau}$
Elle coupe l'axe des absisses en $t = \tau$. Pour $t = \tau$ $s(t) = 63\%.s(0)$.

3.5 Système du second ordre :

Paramètres fondamentaux

$$B_0.s(t) + B_1.\frac{ds(t)}{dt} + B_2.\frac{d^2s(t)}{dt^2} = A_0.e(t)$$

K : gain statique

$$K = \frac{A_0}{B_0}$$

ω_n : fréquence propre non amortie

$$\omega_n = \sqrt{\frac{B_0}{B_2}}$$

z : facteur d'amortissement (coefficient d'amortissement noté m ou ξ)

$$z = \frac{B_1}{2.\sqrt{B_0.B_2}}$$

Définition : Forme canonique du système

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2.z}{\omega_n}.\frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{\omega_n^2}.s(t) = K.e(t)$$

Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2.z}{\omega_n}.p + \frac{1}{\omega_n^2}.p^2}$$

3.5.1 Réponse à un échelon

Equation caractéristique

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2.z}{\omega_n}.p + \frac{1}{\omega_n^2}.p^2}$$

$$(E) : p^2 + 2.z.\omega_n.p + \omega_n = 0$$

$$\Delta' = \omega_n^2.(z^2 - 1)$$

Cas z > 1

$$p_1 = -z.\omega_n - \omega_n.\sqrt{z^2-1} \; et \; p_2 = -z.\omega_n 2\omega_n.\sqrt{z^2-1}$$

$$\tau_1 = -\frac{1}{p_1} \; et \; -\tau_2 = \frac{1}{p_2}$$

On a alors :

$$S(p) = K.\left(\frac{1}{p} + \frac{\tau^2}{\tau_2 - \tau_1}.\frac{1}{1+\tau_1.p} + \frac{\tau^2}{\tau_1 - \tau_2}.\frac{1}{1+\tau_2.p}\right)$$

Et $s(t) = K + \frac{K}{\tau_2 - \tau_1}.(\tau_1.e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2.e^{-\frac{t}{\tau_2}})$

Cas z = 1

L'équation caractéristique présente une racine double :

$p = -\omega_n$ d'où $\tau = -\frac{1}{p} = \frac{1}{\omega_n}$

s(t) devient alors :

$$s(t) = K - K.(1 + \frac{t}{\tau}).e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Cas z $>$ 1 :

L'équation caractéristique présente deux racines complexes conjuguées :

$$p = (-z.\omega_n) \pm (\jmath.\omega_n.\sqrt{1-z^2})$$

d'où

$$S(p) = \frac{1}{p}.\frac{K.\omega_n}{\sqrt{1-z^2}}.\frac{\omega_n.\sqrt{1-z^2}}{(p+z.\omega_n)^2 + (\omega_n.\sqrt{1-z^2})^2}$$

$$s(t) = \int_0^t \frac{K.\omega_n}{\sqrt{1-z^2}}.e{-}z.\omega_n.t.\sin(\omega_n.\sqrt{1-z^2}.t)$$

Chapitre 4

Influence du bouclage su les caractéristiques d'un système

4.1 Premier ordre

- FTBO du premier ordre $\Rightarrow$ FTBF du premier ordre.
- Le gain en boucle fermée a chuté.
- La constante de temps du moteur augmente.

4.2 Premier ordre asservi en position

- On obtient un système du deuxième ordre.

Chapitre 5

Lieux de transferts

Définition : Marge de gain

Gain de réserve pour $\varphi = 180°$ (n'est défini qu'a partir de systèmes d'ordre 3).
En général : $M_{G_0} \approx 12dB$.

Définition : Marge de phase

Marge de réserve pour un gain nul : $M_\varphi = 180° + \varphi_{G=0}$.
En général : $M_\varphi \approx 45°$.

Chapitre 6

Fonctions de transfert généralisées

Forme Génrale

$$F(p) = K.\frac{1 + a.\tau.p}{1 + \tau.p}$$

Le comportement temporel du premier ordre généralisé peut s'accompagner de dépassements indiciels si $a > 1$. On note aussi un saut à l'apparition de l'entrée.
Le comportement fréquentiel donne une phase positive pour $a > 1$.
La pulsation correspondant au maximum de la phase et la valeur de ce maximum sont obtenus par :

$$\omega_m = \frac{1}{\tau.\sqrt{a}}$$

$$\tan(\varphi_m) = \frac{a-1}{2.\sqrt{a}} \text{ ou } \sin(\varphi_m) = \frac{a-1}{a+1} \text{ ou } a = \frac{1+\sin(\varphi_m)}{1-\sin(\varphi_m)}$$

Utilisation

Pour certaines valeurs de ω, on peut avoir une phase positive ($a > 1$), ou négative ($a < 1$). On peut donc utilisé ce système comme correcteur de phase.

Remarques

- Pour que le correcteur soit efficace, il faut une pulsation précise.
- Pour chaque correcteur, le gain se trouve modifié.

Chapitre 7

Précision des sytèmes asservis

7.1 Variations de l'entrée

Définition : Ecart de position

$$\epsilon(p) = E(p) - S(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO}$$

	Classe 0	Classe 1	Classe 2
Echelon ϵ_p : erreur de position	$\frac{e_0}{1+K}$	0	0
Rampe ϵ_t : erreur de trainage	∞	$\frac{a}{K}$	0
Parabole ϵ_a : erreur d'accélération	∞	∞	$\frac{a}{K}$

7.2 Perturbations

Classe de la FTBO : $F_1(p).F_2(p) = \alpha_1 + \alpha_2$.

Dirac

Toute perturbation sous forme d'un Dirac est évacuée.

Echellon

$$\lim_{t \to \infty} s(t) = \frac{p_0.K}{1 + K_1.K_2}$$

Pour une classe 0, la perturbation à l'échellon n'est pas effacée, le gain de la FTBO sera obtenu en minimisant K_2 et en augmentant K_1 de manière à réduire les effets de la perturbation.

[$\alpha_1 = 1$]

$$\lim_{t \to \infty} s(t) = 0$$

Si on place un intégrateur avant la perturbation, celle-ci est effacée.

[$\alpha_2 = 1$]

$$\lim_{t \to \infty} s(t) = \frac{p_0}{K_1}$$

Si l'intégrateur est placé après la perturbation, celle-ci n'est pas effacée, par contre on peut minimiser K_2 devant K_1 pour l'atténuer.

Chapitre 8

Stabilité des systèmes asservis

Définition :

Un système asservi bouclé soumis à une impulsion(dirac) est stable s'il revient au repos après application de l'impulsion.

Theorème

Un système linéaire continu en boucle fermé n'est stable que si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative.

Theorème

Un deuxième ordre est stable si $\xi > 1$. Si $\xi = 0$, le système est oscillant.

8.1 Critères de stabilité

Nyquist : critère du revers

Lorsqu'on décrit la courbe représentative de la fonction de transfert dans le plan de Nyquist, on laisse le point -1 à gauche.

Définition : Marge de Phase

$$M_\varphi = 180° + \varphi_0$$

avec φ_0 la phase pour un gain nul.

Définition : Marge de retard

$$M_r = \frac{M_\varphi}{\omega_0}$$

avec ω_0 la pulsation pour un gain nul.

Black ou Bode

On prend la FTBO et on regarde la marge de phase.
Si $\varphi > 0$, le système est stable.
Si $\varphi = 0$, le système oscille.
Si $\varphi < 0$, le système est instable.

8.2 Critère de Routh

Définition :

Soit $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{F(p)}{1 + F(p).R(p)}$.
On appelle équation caractéristique de $H(p)$ la relation :

$$1 + F(p).R(p) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + a_1.p + a_2.p^2 + \ldots + a_n.p^n = 0$$

Critère de Routh

Pour appliquer le critère de Routh, il faut que les coefficients de l'équation caractéristiques soient > 0. Sinon le système est instable.

a_n	a_{n-2}	a_{n_4}	$\ldots$
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\ldots$
C_1	C_2	$\ldots$	
C_3	$\ldots$		

avec

$$C_1 = \frac{a_{n-1}.a_{n-2} - a_n.a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$C_2 = \frac{a_{n-1}.a_{n-4} - a_n.a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$C_3 = \frac{C_1.a_{n-3} - a_{n-1}.C_2}{C_1}$$